Séminaire BOURBAKI Janvier 2024
75e année, 2023–2024, no 1218, p. 341 à 374
doi : 10.24033/ast.1235

DÉRIVATION DE L'ÉQUATION CINÉTIQUE ASSOCIÉE À L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER CUBIQUE
[*d'après* Yu Deng et Zaher Hani]

par **Anne-Sophie de Suzzoni**

1. Introduction

La turbulence d'onde est l'étude de l'évolution de la loi d'une solution d'une équation d'onde, lorsque la donnée initiale est une variable aléatoire ou quand l'équation admet un terme de forçage aléatoire. Elle a été introduite par Peierls (1929) dans le contexte des cristaux. Cette étude a été suivie de travaux de Brout et Prigogine (1956). Dans les années 1960, la turbulence d'onde a été introduite dans le contexte de la physique des plasmas par Vedenov (1967) et Zaslavskii et Sagdeev (1967), et dans le contexte de la mécanique des fluides par exemple par Hasselmann (1962, 1963) et Benney et Saffman (1966). Dans le même temps, elle a été popularisée par Zakharov, dont une des contributions majeures a été l'introduction du spectre à présent nommé de Kolmogorov–Zakharov, qui modélise un transfert d'énergie entre échelles spatiales, voir l'article de Zakharov (1965). Il s'agit d'un domaine très actif en physique mathématique comme en témoignent les livres de Zakharov, L'vov et Falkovich (2012), Nazarenko (2011) ou Galtier (2022).

À partir de la fin des années 2000, la communauté mathématique a commencé à s'intéresser à la turbulence faible, un sous-domaine de la turbulence d'onde dans lequel les données initiales sont supposées petites. Une découverte majeure des travaux des physiciens sus-mentionnés a été la possibilité de décrire la statistique de certaines solutions d'équations d'ondes par des équations dites cinétiques. Il s'agit de dériver, c'est-à-dire d'obtenir par un processus mathématique rigoureux, ou d'étudier des équations cinétiques régissant ou émanant de l'étude de la statistique de solutions d'équations d'onde. Lukkarinen et Spohn (2011) ont décrit un effet de mélange pour la dynamique d'équations de Schrödinger discrètes. Puis N. Tzvetkov et moi avons étudié la limite de petite non-linéarité pour des équations primitives atmosphériques (de Suzzoni et Tzvetkov, 2014). S'en est suivie une série de travaux sur l'équation de Schrödinger cubique par Buckmaster et al. (2021) puis simultanément Collot et

Germain (2019) et Deng et Hani (2021a). Parallèlement , Dymov et Kuksin (2020, 2021, 2023) ont travaillé avec une approche stochastique. Cette série a culminé avec le travail de Deng et Hani (2023b) qui est l'objet principal de ces notes, et dans lequel les auteurs dérivent rigoureusement l'équation cinétique régissant l'évolution des corrélations d'une solution de cette équation. Dans le même temps, Staffilani et Tran (2021) ont dérivé une équation cinétique pour des équations primitives atmosphériques. Notons que ces travaux ont été fortement influencés d'une part par l'étude du problème de Cauchy pour différentes équations avec données aléatoires, en particulier par Bourgain (1994), Burq et Tzvetkov (2008) et Deng, Nahmod et Yue (2022) ; d'autre part par la dérivation de régimes collisionnels et diffusifs pour l'équation de Schrödinger avec potentiels aléatoires, en particulier par Erdős, Salmhofer et Yau (2008) et Erdős et Yau (2000) ; et enfin par le théorème de dérivation de l'équation de Boltzmann pour des particules classiques par Lanford (1976).

Depuis, le travail à l'étude ici a été poursuivi par Deng et Hani (2023a,c). Par ailleurs, plusieurs travaux récents abordent des questions connexes. Par exemple, dans le cadre de domaines inhomogènes, on mentionne les travaux de Ampatzoglou, Collot et Germain (2021) et Hannani et al. (2022), dans le cadre des fluides celui de Ma (2022), et pour des modèles jouets en dimension finie par celui de Dubach, Germain et Harrop-Griffiths (2022). L'étude de l'équation cinétique elle-même a fait l'objet de travaux par Escobedo, Mischler et Velazquez (2008) et Escobedo, Mischler et Velazquez (2007), Escobedo et Velázquez (2015), Collot, Dietert et Germain (2024), Menegaki (2022), et Faou (2020) pour une version stochastique. Pour un modèle linéaire de turbulence, on mentionnera le travail de Apolinário et al. (2023).

Dans ces notes, on cherche à dériver une équation régissant la dynamique de la statistique d'une solution de l'équation de Schrödinger cubique posée sur un tore de taille $L \geqslant 1$, c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} i\partial_t u - \Delta u + \lambda^2 |u|^2 u = 0 \quad \text{sur } \mathbb{T}_L^d = (L\mathbb{T})^d \\ \qquad u(t=0) = u_{\text{in}} \end{array} \right. \tag{1}$$

où $u : [0,T] \times \mathbb{T}_L^d \to \mathbb{C}$ est l'inconnue du système pour un temps $T > 0$, où Δ est l'opérateur de Laplace–Beltrami sur le tore $\mathbb{T}_L^d$, où la dimension d est supérieure ou égale à 3, et où λ est un paramètre réel strictement positif de l'équation. De plus, la donnée initiale u_{in} est le champ gaussien défini par

$$u_{\text{in}}(x) = \frac{1}{L^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}_L^d} \sqrt{U_{\text{in}}(k)} \eta_k e^{ik\cdot x} \tag{2}$$

où $\mathbb{Z}_L^d = \frac{1}{L}\mathbb{Z}^d$, où $k \cdot x = 2\pi \sum_{l=1}^d k^l x^l$, où $(\eta_k)_{k\in\mathbb{Z}_L^d}$ est une famille de variables aléatoires gaussiennes indépendantes centrées et normalisées (c'est-à-dire de variances 1) et où U_{in} est une fonction dans la classe de Schwartz positive et non nulle. Notons que la série définissant u_{in} converge, en notant $\mathbf{\Omega}$ l'espace de probabilité sus-jacent à la famille $(\eta_k)_k$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, dans $L^2(\mathbf{\Omega}, H^s(\mathbb{T}_L^d))$. En particulier, une conséquence des injections de Sobolev est la continuité presque sûre de u_{in}, ce qui permet de donner un sens à $u_{\text{in}}(x)$.

Une des idées essentielles relatives à la dérivation d'équations cinétiques est celle de *propagation du chaos* que l'on décrit sommairement dans ce qui suit. Notons qu'au temps initial les coefficients de Fourier sont indépendants. Aux temps ultérieurs, cette indépendance est brisée par les interactions entre différentes longueurs d'onde dues à la non-linéarité. Néanmoins, le nombre de coefficients de Fourier de la donnée initiale croît avec la taille du tore. Ainsi, la « proportion » d'uplets de coefficients de Fourier qui ne sont pas indépendants les uns des autres devient très petite quand L tend vers l'infini. On se place alors dans ce régime et on fait l'hypothèse que la dynamique non linéaire est principalement régie par les triplets de coefficients de Fourier indépendants, qui eux-mêmes engendrent de l'indépendance entre les coefficients de Fourier de la solution du problème de Cauchy (1). La propagation du chaos revient à supposer qu'en tout temps, ces derniers se comportent presque comme des variables aléatoires indépendantes ; et même, dans le cas gaussien que l'on décrit ici, qu'ils se comportent comme des variables aléatoires gaussiennes centrées et indépendantes. On mentionne par exemple la section 2.2.2 du livre de Nazarenko (2011). Or, la loi d'une famille de variables (conjointement) gaussiennes est complètement déterminée par les covariances entre les différentes variables. Cela suggère d'étudier l'évolution de la quantité

$$\mathbb{E}(|\hat{u}(t,k)|^2)$$

dans un régime asymptotique où L est très grand, les covariances entre deux modes de Fourier différents étant supposées nulles en vertu de l'hypothèse de propagation du chaos. Notons que cette hypothèse reste à démontrer dans le cas général. Elle a été obtenue comme conséquence de la dérivation de l'équation cinétique par Deng et Hani (2021b). Par ailleurs, j'ai formulé un résultat combinatoire général (de Suzzoni, 2022).

Dans le cadre de la turbulence faible — comme sous-théorie de la turbulence d'onde — on considère également que la non-linéarité tend vers 0. Cela requiert de se placer à une échelle de temps où l'on observe des effets non linéaires. Pour notre problème (1), nous allons identifier la *force de la non-linéarité*, c'est-à-dire l'espérance de $\lambda^2|u_{\text{in}}(x)|^2$ [(1)]. Comme $u_{\text{in}}(x)$ est une gaussienne centrée, l'espérance de $|u_{\text{in}}(x)|^2$ caractérise la loi de $|u_{\text{in}}(x)|$. On a

$$\mathbb{E}(|u_{\text{in}}(x)|^2) = \frac{1}{L^{2d}} \sum_{k,k' \in \mathbb{Z}_L^d} \sqrt{U_{\text{in}}(k) U_{\text{in}}(k')} e^{i(k-k')\cdot x} \mathbb{E}(\eta_k \overline{\eta_{k'}}).$$

[(1)] et pas celle de $\lambda^2|u_{\text{in}}(x)|^3$ puisque si l'on considère l'équation vérifiée par νu, pour $\nu > 0$, la non-linéarité est bien multipliée par ν^2 et non ν^3

La loi de la famille $(\eta_k)_{k\in\mathbb{Z}^d_L}$ assure que

$$\mathbb{E}(\eta_k\overline{\eta_{k'}}) = \delta_{k,k'}$$

ce qui entraîne que

$$\mathbb{E}(|u_{\rm in}(x)|^2) = \frac{1}{L^{2d}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d_L} U_{\rm in}(k) \sim \frac{1}{L^d}\int U_{\rm in}(\xi)d\xi.$$

Ainsi, l'espérance de $|u_{\rm in}(x)|^2$ est de l'ordre de L^{-d}, et la force de la non-linéarité est donnée par $\alpha = L^{-d}\lambda^2$. Notons qu'un changement de convention pour les coefficients de Fourier ou qu'un changement d'échelle dans l'équation de Schrödinger donnent lieu dans la littérature à différentes expressions de la force de la non-linéarité qui n'ont pas d'influence sur la nature des résultats.

L'objet d'étude devient

$$U(t,k) = \lim_{\substack{L\to\infty\\ \alpha\to 0}} \mathbb{E}(|\hat{u}(tT_{\rm kin},k)|^2)$$

où $T_{\rm kin} > 0$ est l'échelle de temps dite cinétique, dépend des paramètres α et L, et reste à déterminer. Bien sûr, $U(t,k)$ n'a pas de sens *a priori* puisque les ensembles $\mathbb{Z}^d_L$ sont pour la plupart disjoints. Par ailleurs, il faut donner un sens à limite : passe-t-on d'abord à la limite en α, puis en L, ou l'inverse, ou bien existe-t-il une relation entre α et L ? La nature de la limite a une grande influence sur l'asymptotique, voir Remarque 2.2. Nous allons nous placer dans un régime dit *cinétique*, que l'on définira et discutera aux remarques 2.1, 2.2. Pour la dérivation heuristique de l'équation d'évolution pour U, on choisira de prendre d'abord la limite en L, puis en α afin d'en clarifier l'articulation, mais le théorème considéré ici choisit une relation spécifique entre α et L : ces deux régimes sont cinétiques.

On prendra pour convention dans toute la suite

$$\hat{u}(k) = \int_{\mathbb{T}^d_L} u(x)e^{-ik\cdot x}dx, \quad u(x) = \frac{1}{L^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d_L}\hat{u}(k)e^{ik\cdot x}.$$

Plan du texte

Dans la sous-section suivante, j'énonce et commente le résultat principal. Il stipule que la quantité $\mathbb{E}(|\hat{u}(tT_{\rm kin},k)|^2)$ tend, quand L tend vers ∞ et $\alpha = L^{-1}$ vers la solution d'une équation cinétique, (4), qu'on dérive heuristiquement à la section 2. Cette dérivation heuristique est relativement longue, car elle permet d'introduire les objets intervenant dans la preuve de Deng et Hani, 2023b et de mettre en avant quelques considérations venant de la littérature physique expliquant certains aspects du résultat, en particulier la dépendance de l'échelle de temps cinétique en α et L. Dans les sections suivantes, on présente quelques points de la preuve : en particulier, on développe les objets de la section 2 en une diagrammatique ; on expose la structure générale de la preuve ainsi que quelques structures récursives faisant émerger l'équation cinétique (4).

Résultat principal

On verra à la remarque 2.1 que le régime $\alpha = L^{-1}$ est un régime privilégié : c'est celui que l'on choisit ici. La dérivation heuristique de l'équation (*cf* sous-section 2.2) nous assure que l'échelle de temps cinétique est $T = \alpha^{-2}$. Cela implique quelques difficultés techniques que nous discuterons à la remarque 2.2 et qui sont liées au choix d'échelle . En particulier, cela implique de se placer sur un tore *générique* plutôt que sur le tore homogène (ou rectangulaire). Au lieu de modifier le tore, on modifie de façon équivalente la définition de l'opérateur de Laplace–Beltrami qui devient

$$\Delta_\beta = \sum_{j=1}^{d} \beta_j \partial_j^2 ,$$

où $\beta \in (\mathbb{R}_+)^d$ est choisi dans un ensemble de mesure pleine de $(\mathbb{R}_+)^d$ de façon à ce que le comptage de la remarque 2.2 soit valide. Dans toute la suite, on supposera β fixé de façon adéquate et on omettra la dépendance en β des différentes quantités concernées.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème.

Théorème 1.1 (Deng et Hani, 2023b). *Soient $d \geqslant 3$, $\alpha = L^{-1}$ et $T = \frac{1}{2}\delta L^2$ avec $\delta \ll 1$ indépendant de L. Soit U l'unique solution du problème de Cauchy* (4). *Pour tout L assez grand, il existe $A > 0$ indépendant de L tel que le problème de Cauchy* (1) *soit bien posé sur* $[0, T]$ *avec probabilité* $1 - L^{-A}$. *En notant son unique solution u (qui dépend implicitement de L), on a*

$$\lim_{L\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} \sup_{k\in\mathbb{Z}_L^d} |\mathbb{E}(|\hat{u}(tT,k)|^2) - U(t,k)| = 0$$

L'équation (4) est l'équation d'évolution effective des corrélations des coefficients de Fourier que l'on dérive formellement à la sous-section 2.2.