Séminaire BOURBAKI Mars 2024
75e année, 2023–2024, nº 1221, p. 429 à 465
doi : 10.24033/ast.1238

COMPLÉTION PROFINIE ET GÉOMÉTRIE DES GROUPES
[*d'après* Martin R. Bridson, Alan Reid,...]

par **Bertrand Rémy**

(...) et je me rendais compte alors que la mer elle aussi est veinée par les rides des courants et que, quand, enfant, je regardais les nuages et la route des étoiles, sans m'en douter, j'avais déjà commencé mes voyages.

Extrait de : Cesare Pavese, *La lune et les feux*.

Introduction

Encore des mots, toujours des mots, les mêmes mots : groupe, action, isomorphisme, relation d'équivalence... Dans ce texte, il est en effet question de théorie des groupes. Plus précisément on va considérer en premier lieu des groupes infinis de *type fini*, c'est-à-dire engendrés par une partie finie. L'objectif lointain, sans doute optimiste, est d'obtenir une classification des groupes de type fini, du moins un guide dans leur zoologie. Or, on sait que la relation d'isomorphie (1) est trop fine pour admettre un quotient associé raisonnable du point de vue de la théorie descriptive des ensembles (Thomas et Velickovic, 1999). Si l'on reste optimiste, cela suggère de multiplier les relations d'équivalence pour espérer s'y retrouver. Dans les années 90, Gromov a suggéré des relations d'équivalence plus grossières que la relation d'isomorphie, mais en lien avec des propriétés géométriques ou mesurables des espaces sur lesquels ces groupes agissent de façon convenable. Ces approches (*cf.* 2.1) ont conduit à des progrès spectaculaires en théorie des groupes, nécessitant des techniques issues d'autres domaines des mathématiques, notamment analytiques, souvent en les enrichissant en retour (*cf.* Haïssinsky, 2009 et Houdayer, 2012).

On s'intéresse ici à la relation d'équivalence qui met dans la même classe deux groupes de type fini si, et seulement si, ils possèdent la même collection de quotients finis : c'est la *relation d'équivalence profinie*. Cette relation fait intervenir elle aussi des

(1) La terminologie est vintage, voire délicieusement désuète : c'est bien entendu la relation qui met dans la même classe des groupes isomorphes l'un à l'autre.

actions, à savoir les actions du groupe considéré sur les ensembles finis. Cela mobilise moins de structure ; les habitué·e·s des théories géométrique et mesurable des groupes doivent en quelque sorte repartir de zéro et se (re)faire des intuitions. Un des objectifs de ce rapport est cependant de mettre en lumière le fait que la géométrie revient très vite en force dans les arguments liés aux problèmes d'équivalence profinie, notamment par la topologie des variétés différentielles de dimension 3. Comme attendu, le lien est assuré par la notion de groupe fondamental et on fait un plein usage des progrès récents liés à la géométrisation des 3-variétés. Cet usage est le premier sens qu'on peut donner au titre de ce texte.

Revenons à l'équivalence profinie des groupes de type fini. La construction systématiquement utilisée dans ce contexte est celle de complétion profinie (1.3). Étant donné un groupe Γ, le *complété profini* de Γ est la donnée d'un homomorphisme de groupes $\iota : \Gamma \to \widehat{\Gamma}$ d'image dense dans un groupe $\widehat{\Gamma}$ qui est compact, totalement discontinu et dont la collection de quotients finis est celle de Γ. Une propriété universelle formalise cela, elle permet de définir un foncteur $\widehat{\cdot}$ de la catégorie des groupes de type fini vers celles des *groupes profinis* (c'est-à-dire des groupes compacts et totalement discontinus). Pour cette introduction, on laisse la lectrice ou le lecteur imaginer ce qu'est cette propriété universelle, une fois qu'on a dit que $\widehat{\Gamma}$ est la limite projective des quotients finis de Γ. La reformulation de l'équivalence profinie entre deux groupes de type fini Γ et Λ est alors la suivante : il existe un isomorphisme $\widehat{\Gamma} \simeq \widehat{\Lambda}$ entre complétés profinis (sans qu'on suppose l'existence *a priori* d'une flèche entre Γ et Λ).

Quelles sont les difficultés liées à l'étude de l'équivalence profinie ? La première est qu'il faut supposer que les groupes de type fini étudiés ont suffisamment de quotients finis : cela impose de se restreindre à la classe des groupes *résiduellement finis*, c'est-à-dire des groupes dans lesquels l'intersection des sous-groupes d'indice fini est triviale. Cela assure que la flèche de complétion ι est injective. La seconde difficulté est qu'on dispose de très peu d'invariants profinis. Les invariants homologiques en degré 1 se comportent favorablement en général. On voit par exemple que si Γ et Λ sont profiniment équivalents, alors leurs abélianisés $\mathrm{H}_1(\Gamma, \mathbf{Z}) = \frac{\Gamma}{[\Gamma,\Gamma]}$ et $\mathrm{H}_1(\Lambda, \mathbf{Z}) = \frac{\Lambda}{[\Lambda,\Lambda]}$ sont isomorphes. Cependant, la plupart des propriétés de théorie géométrique ou mesurable des groupes ont des comportements incompatibles avec l'équivalence profinie (*cf.* 2.3 pour un tableau de la situation, désolante ou excitante suivant les goûts).

Dès lors, quelles questions se poser en matière d'équivalence profinie ? Le problème le plus naturel est celui de la rigidité profinie. On dit qu'un groupe de type fini Γ est *profiniment rigide au sens absolu* si tout groupe qui lui est profiniment équivalent lui est en fait isomorphe, et pour des raisons expliquées ci-dessous on se restreindra aux groupes résiduellement finis. Autrement dit, dès qu'un groupe de type fini et résiduellement fini Λ est tel que $\widehat{\Gamma} \simeq \widehat{\Lambda}$, alors il existe un isomorphisme $\Gamma \simeq \Lambda$. Par exemple, le groupe $\mathbf{Z}^r$ est profiniment rigide pour tout entier $r \geqslant 1$; c'est vrai aussi pour certains groupes nilpotents (mais pas tous). Il existe des groupes virtuellement cycliques non isomorphes mais profiniment équivalents ; précisément, ces groupes (non profiniment rigides, donc) peuvent être choisis comme des produits semi-directs de $\mathbf{Z}$ par $\mathbf{Z}/25\mathbf{Z}$ (Baumslag, 1974). Historiquement, une paire de groupes fondamentaux de variété algébriques profinimement équivalents mais non isomorphes est exhibée dans Serre, 1964, où le complété profini commun est le groupe fondamental (au sens des géomètres algébristes) de la variété considérée.

Passons maintenant en revue quelques résultats de rigidité profinie. Le phénomène de rigidité dont on vient de parler est le plus fort pour un groupe de type fini résiduellement fini donné Γ ; c'est celui où les seules hypothèses faites sur le groupe Λ comparé à Γ sont qu'il est lui aussi de type fini et résiduellement fini. On parlera de *rigidité profinie relative* quand on imposera en outre au groupe Λ d'appartenir à une classe plus restreinte, par exemple à la classe des groupes de présentation finie, ou encore à la classe des groupes fondamentaux d'un certain type de variété différentiable (c'est un autre sens qu'on peut donner au titre de ce texte). Les contributions majeures en matière de rigidité profinie absolue sont essentiellement dues à Martin Bridson, Alan Reid et leurs collaborateurs. Voici par exemple le principal résultat de Bridson, McReynolds et al., 2020 (*cf.* 4.1 et 4.2 pour une esquisse de démonstration).

Théorème 0.1. *Il existe des réseaux arithmétiques de* $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$*, uniformes et non uniformes, qui sont profinimement rigides au sens absolu.*

Rappelons que le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ est le groupe des isométries préservant l'orientation de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$ de dimension 3. Par conséquent tout réseau (*i.e.* tout sous-groupe discret de covolume fini) de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ donne lieu à un orbi-espace hyperbolique de dimension 3, à savoir $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}/\Gamma$. Ce quotient est une variété si, et seulement si, Γ est sans torsion, auquel cas Γ est le groupe fondamental de $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}/\Gamma$. On va voir que l'exemple de réseau profinimement rigide (au sens absolu) *uniforme* (*i.e.* où le quotient $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}/\Gamma$ est compact) le plus parlant est le groupe fondamental Γ_W de la variété de Weeks-Fomenko-Matveev. L'exemple non uniforme le plus directement accessible est le groupe de Bianchi $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}[\omega])$ où ω est une racine cubique non triviale de l'unité. Dans les deux cas, ces réseaux sont proches des réseaux de covolume minimal dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$; la variété de Weeks-Fomenko-Matveev est de volume minimal parmi les variétés hyperboliques de dimension 3 (*cf.* Maillot, 2010).

La première étape de la démonstration (esquissée dans 4.1) a pour principal objet d'étude les représentations $\Gamma \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ d'image dense pour la topologie de Zariski. Le concept-clé est celui de Galois-rigidité d'une telle représentation : un réseau Γ est Galois-rigide si le nombre de représentations Zariski denses $\Gamma \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ est minimal. Partant d'un groupe profiniment rigide Λ, l'isomorphisme $\widehat{\Gamma} \simeq \widehat{\Lambda}$ (qui est la seule hypothèse faite sur Λ !) et l'idée d'identifier $\mathbf{C}$ à $\overline{\mathbf{Q}_p}$ permettent de transférer un comptage de représentations de Γ à Λ pour en déduire l'existence d'une représentation Zariski dense $\Lambda \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. Des arguments d'algèbres de quaternions définies sur le corps des traces de Γ, naturels pour les 3-variétés hyperboliques mais développés ici dans une direction arithmétique assez poussée, permettent de prouver l'existence d'une représentation Zariski dense $\Lambda \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ dont l'image est contenue dans Γ. La seconde étape de la démonstration (esquissée dans 4.2) utilise de façon intensive les propriétés topologiques de certaines 3-variétés hyperboliques pour prouver que l'image de la représentation ainsi obtenue est égale à Γ exactement. Cela se voit au moyen d'arguments de comptage de réseaux de petit covolume, en contrôlant simultanément la croissance de premier nombre de Betti quand on passe d'un réseau à un sous-groupe d'indice fini.

Outre ces exemples de groupes kleiniens (agissant sur $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$), la même stratégie s'est avérée fructueuse pour démontrer la rigidité profinie absolue de certains groupes fuchsiens (agissant sur le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2_{\mathbf{R}}$) et celle de groupes fondamentaux de certaines 3-variétés fibrant en cercles, dites de Seifert. Dans l'état actuel de la théorie, il faut se tourner vers des questions de rigidité profinie relative si l'on veut un corpus de résultats substantiellement plus important. C'est ici que la topologie et la géométrie des variétés de dimension 3 fait merveille (*cf.* 3.3). Un résultat marquant dit que, pour une variété M dont le revêtement universel est isométrique à $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$ et de volume riemannien fini, il n'existe (à isomorphisme près) qu'un nombre fini de groupes fondamentaux de variétés de dimension 3 (sans plus d'hypothèse) qui soient de type fini et de complété profini isomorphe à $\widehat{\pi_1(M)}$ (Liu, 2023).

À quel point des phénomènes de non rigidité peuvent-ils se manifester ? Chercher à répondre à cette question révèle le rôle important de propriétés de finitude qu'on va imposer aux groupes qu'on choisit de considérer. Voici un résultat exemplaire à cet égard (*cf.* 3.2 pour plus de détails).

Théorème 0.2. *Il existe des groupes hyperboliques au sens de Gromov, de dimension* 2 [(2)]*, contenant une infinité non dénombrable* [(3)] *de sous-groupes* $u_H : H \hookrightarrow \Gamma$ *tels que l'application déduite entre complétés profinis soit un isomorphisme* $\widehat{u_H} : \widehat{H} \simeq \widehat{\Gamma}$*. Ces groupes* Γ *peuvent être choisis de telle sorte qu'il y ait une infinité dénombrable de sous-groupes* H *comme précédemment qui soient en outre de type fini.*

Rappelons que les groupes hyperboliques au sens de Gromov sont de présentation finie et que les classes de conjugaison d'élements de torsion sont en nombre fini dans un tel groupe. Il est intéressant de noter que les groupes de cet énoncé sont de dimension 2. On peut les comparer aux réseaux fuchsiens cocompacts connus pour être profiniment rigides au sens absolu : ce sont eux aussi des groupes de dimension 2, mais ils sont hyperboliques au sens classique (pré-Gromov) du terme.

C'est surtout la façon dont la rigidité profinie fait défaut qui est intéressante : dans le théorème, l'isomorphisme entre complétés profinis provient d'une flèche, et même

(2) On parle de dimension homologique virtuelle.
(3) On compte ici les images.

d'une inclusion. C'est dans cette situation particulière que Grothendieck avait formulé la question suivante (*cf.* 3.1) : *étant donné un groupe* Γ *de présentation finie et résiduellement fini, est-il possible qu'il existe un sous-groupe propre* $u_H : H \hookrightarrow \Gamma$ *de présentation finie qui induise un isomorphisme* $\widehat{u_H} : \widehat{H} \simeq \widehat{\Gamma}$ *entre complétés profinis ?*

Le théorème ci-dessus ne répond pas *stricto sensu* à la question ; le mentionner ici est l'occasion de signaler à quel point la difficulté des problèmes dont il va être question dépend des propriétés de finitude qu'on recherche ou s'impose. En fait, des inclusions de groupes tous deux de présentation finie, comme dans la question de Grothendieck, avaient déjà été construites par Bridson et Grunewald, suivant des idées de Bass et Lubotzky (*cf.* la fin de 3.1). Les constructions combinent l'idée, due à Platonov et Tavgen, d'utiliser un produit fibré associé à un quotient de groupes bien choisi avec l'usage, initié par Baumslag, Bridson, Miller et Short, de finitudes cohomologiques supérieures pour améliorer les propriétés du produit fibré en question (*cf.* 3.2 pour plus de détails).

Le domaine de la rigidité profinie fourmille de conjectures (on en présente quelques-unes en 4.3). La plus intrigante est peut-être celle qui porte sur les groupes libres ; c'est un problème posé par Remeslennikov dans le *Kourovka notebook* (*cf.* Khukhro et Mazurov, 2018, Question 5.48).

Conjecture 0.3. *Pour tout entier* $n \geqslant 2$*, le groupe libre* F_n *est profiniment rigide au sens absolu ; autrement dit, tout groupe de type fini résiduellement fini possédant les mêmes quotients finis que* F_n *est un groupe libre.*

Encore une fois, la difficulté d'un tel énoncé est qu'il porte sur une rigidité profinie absolue. Une idée naturelle est de ramener la rigidité absolue à une rigidité relative vis-à-vis d'une classe convenable de groupes comparés. Il existe à ce jour deux techniques pour cela : l'utilisation d'une loi satisfaite par le groupe (commutativité, nilpotence d'un type précis, etc.) ou la Galois-rigidité évoquée ci-dessus. La lectrice ou le lecteur perspicace aura remarqué que les groupes dans les résultats de rigidité sus-mentionnés contiennent tous des groupes libres, ce qui exclut l'utilisation d'une loi providentielle [(4)].

Structure de ce texte. — La section 1 rappelle les rudiments et résultats nécessaires de groupes et de complétion profinis pour la suite du rapport ; on y explique pourquoi il est important de se restreindre aux groupes résiduellement finis. La section 2 introduit la notion d'équivalence profinie en la plaçant dans le contexte d'autres relations d'équivalence pour les groupes de type fini ; on y explique que les propriétés usuelles sont la plupart du temps inopérantes. La section 3 présente des résultats de rigidité profinie relative, à la fois dans le contexte des groupes fondamentaux de variétés et dans le cadre de la question de Grothendieck ; c'est l'occasion de mettre en

[(4)] En théorie des groupes, il suffit d'être un peu libre pour être hors-la-loi.