Séminaire BOURBAKI Juin 2024
75e année, 2023–2024, no 1223, p. 509 à 553
doi : 10.24033/ast.1240

LIVRES BRISÉS POUR DES FLOTS DE REEB EN DIMENSION 3
[*d'après* Colin, Dehornoy et Rechtman]

par **Anna Florio**

1. Introduction

L'objectif de ce texte est de présenter la définition de livre brisé portant un flot de Reeb sur une variété M de dimension 3. Cette notion, qui généralise la définition de livre ouvert, a été introduite par Colin, Dehornoy et Rechtman (2023).

Pour parler de flot de Reeb, il faut partir d'une 1-forme lisse α, appelée *forme de contact*, définie sur M, telle que $\alpha \wedge d\alpha$ est une forme volume ; le noyau de α définit alors un champ de plans, appelé *structure de contact*. Grâce au théorème de Frobenius, la structure de contact peut être pensée comme étant l'opposé d'un champ de plans localement intégrable. Il est alors possible définir un champ de vecteurs, appelé *champ de Reeb*, en partant de α. Le flot de Reeb est le flot engendré par ce champ.

Des exemples classiques de flots de Reeb sont les flots géodésiques sur une surface riemannienne, ainsi que les flots hamiltoniens sur un niveau d'énergie compact, pour un hamiltonien sur $\mathbb{R}^4$ strictement convexe. En mécanique céleste, le flot du problème restreint circulaire à 3 corps est aussi un exemple de flot de Reeb.

De manière informelle, la notion de livre brisé est la donnée d'une réunion finie de nœuds, notée K, et d'un feuilletage du complémentaire de K, décrit au voisinage de chaque nœud par certains modèles locaux. La définition précise sera donnée dans le §2.2. Son intérêt dynamique apparaît lorsqu'on demande que le livre brisé *porte* une forme de contact : les singularités du feuilletage sont alors des orbites périodiques et l'intérieur de chaque feuille est positivement transverse au champ de Reeb associé.

Quelle forme de contact peut être portée par un livre brisé ? Le résultat principal de Colin, Dehornoy et Rechtman (2023) répond à cette question :

Théorème. *Pour toute forme de contact α non dégénérée d'une variété fermée, orientée, de dimension 3, il existe un livre brisé qui porte α.*

Après avoir rappelé les notions nécessaires pour parler de flots de Reeb et de livres brisés, nous présenterons les conséquences dynamiques remarquables d'une telle construction. Notamment, l'existence de livres brisés portant une forme de contact a permis aux auteurs de montrer que pour le champ de Reeb d'une forme de contact non dégénérée, le nombre d'orbites périodiques est soit égal à 2, soit infini. De plus, ils donnent une condition topologique sur la variété qui suffit à assurer que l'entropie topologique [(1)] du flot de Reeb soit positive [(2)], quelle que soit la forme de contact choisie.

Nous allons parler aussi des travaux de Colin, Dehornoy, Hryniewicz et al. (2023) et de Contreras et Mazzucchelli (2022), qui, en parallèle, ont montré qu'un flot de Reeb générique admet toujours une section de Birkhoff. Le point clef de la preuve de ces résultats est l'existence de livres brisés pour la forme de contact définissant le flot de Reeb.

Dans la section 3, nous allons présenter les idées principales pour construire un livre brisé, ainsi que les outils qui entrent en jeu. Dans la section 4, nous allons donner quelques idées des preuves des conséquences dynamiques de Colin, Dehornoy et Rechtman (2023).

Remerciements

Je suis très reconnaissante à Ana Rechtman d'avoir répondu à toutes mes questions, ainsi qu'à Patrick Bernard, Vincent Colin, Marco Mazzucchelli, Umberto Hryniewicz et Anne Vaugon pour leurs explications. Je remercie Nicolas Bourbaki, Martin Leguil et Anne Vaugon pour leur relecture, ainsi que Yating Liu pour l'aide avec la réalisation des dessins.

2. Définitions et résultats principaux

Pour introduire la définition de livre brisé de Colin, Dehornoy et Rechtman (2023), nous avons d'abord besoin de parler de sections et sections de Birkhoff pour un flot sur une variété de dimension 3 et de dynamique de contact. Dans la suite, sauf mention explicite du contraire, tous les objets considérés seront lisses (C^∞) et M indiquera une variété de dimension 3, fermée (*i.e.* compacte et sans bord) et orientée.

[(1)] L'entropie topologique est une quantité qui mesure la complexité d'un système dynamique, voir le §4.1.

[(2)] Ici et dans la suite, « positive » signifie « strictement positive ».

2.1. Sections de Birkhoff pour un flot en dimension 3

Dans ce paragraphe, nous donnons les définitions de section et de section de Birkhoff pour un flot en dimension 3. Ce seront des notions clefs dans la construction des livres brisés.

Considérons un champ de vecteurs X non singulier sur une variété M. Notons ϕ_t^X le flot engendré [(3)] par X. Pour comprendre les propriétés du flot, il est parfois possible d'étudier une dynamique plus simple, la dynamique d'un difféomorphisme induit par le flot sur une surface. Comment faire ? Les sections de Birkhoff sont un outil précieux qui permet une telle étude.

Définition 2.1. Une *X-section* est une immersion $\imath\colon (\Sigma, \partial\Sigma) \to (M, K)$ d'une surface compacte Σ à bord $\partial\Sigma$ telle qu'on ait $\imath(\partial\Sigma) = K$, où K est une réunion finie d'orbites périodiques pour X, et que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

- ▷ pour chaque composante connexe c de $\partial\Sigma$, l'image $\imath(c)$ est un revêtement (éventuellement multiple) d'une orbite périodique de X ;
- ▷ la restriction $\imath|_{\mathrm{int}(\Sigma)}$ est un plongement et l'image $\imath(\mathrm{int}(\Sigma))$ [(4)] est positivement transverse [(5)] à X.

Si l'orbite d'un point de $\imath(\mathrm{int}(\Sigma))$ rencontre la section une infinité de fois, nous pouvons définir l'application de retour sur la section le long de cette orbite. Si cela est possible pour tous les points, nous parlons alors de section de Birkhoff.

Définition 2.2. Une *section de Birkhoff* est une X-section telle qu'il existe $T > 0$ pour lequel, pour tout $x \in M$, on a $\phi^X_{[0,T]}(x) \cap \imath(\Sigma) \neq \emptyset$, *i.e.* chaque orbite rencontre en temps au plus T la surface $\imath(\Sigma)$.

Exemple 2.3. Soit (S^2, g) la sphère de dimension 2 munie d'une métrique riemannienne. Considérons le fibré unitaire tangent $M = T^1_g S^2$, et le flot géodésique (ϕ_t^g) sur M. Soit $\gamma \subset S^2$ une géodésique fermée de longueur L : elle existe toujours et divise la sphère en deux hémisphères. On peut alors construire une section pour le flot comme suit. Considérons $\Sigma = \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times [0, \pi]$. Fixons un des deux hémisphères et considérons l'ensemble des $(x, v) \in T^1_g S^2$ tels que $x \in \gamma$ et v est un vecteur unitaire qui pointe vers l'hémisphère fixé. Un tel ensemble peut être réalisé comme immersion de l'anneau Σ. Dans le cas où la courbure associée à la métrique g est strictement positive, l'anneau qu'on vient de décrire est en effet une section de Birkhoff. Il s'agit d'un résultat de Birkhoff (1917).

[(3)] On omettra le X et on écrira ϕ_t quand le contexte rendra la dépendance en X claire. Dans la suite, on se permettra aussi des glissements, comme la notation ϕ_t^g pour noter le flot géodésique sur une surface riemannienne (S, g), voir Exemple 2.3.

[(4)] Ici et dans la suite, la notation $\mathrm{int}(\cdot)$ désigne l'intérieur d'un ensemble.

[(5)] L'image $\imath(\mathrm{int}(\Sigma))$ est positivement transverse à X si X est transverse à la surface et si le vecteur normal à la surface et le champ X pointent du même côté.

En particulier, l'existence d'une section de Birkhoff nous permet de définir une application de premier retour sur $\imath(\mathrm{int}(\Sigma))$ et, quitte à avoir un bon comportement au bord, un difféomorphisme sur une surface. Pour illustrer l'importance de l'existence de tels objets, nous donnons l'exemple suivant. Supposons que notre surface Σ est un disque. Le théorème de Brouwer assure qu'un homéomorphisme sur le disque ouvert a toujours au moins un point fixe. Cela implique alors que notre flot a au moins deux orbites périodiques, le bord de notre disque et l'orbite qui correspond au point fixe de l'application de premier retour sur la section de Birkhoff.

Comme évoqué ci-dessus, pour définir une application de premier retour sur notre surface qui soit un difféomorphisme, nous avons besoin d'une définition plus forte : on parle alors de section de Birkhoff ∂-*forte*. Définissons maintenant cette notion.

Étant donnée une orbite périodique γ pour le flot de X, nous pouvons éclater cette orbite de la façon suivante. Introduisons un fibré en cercle $\mathbb{T}_\gamma$ au-dessus de γ : il s'agit du (double) quotient $(T_\gamma M/T\gamma)/\mathbb{R}_+$, où $T_\gamma M$ est la réunion des espaces tangents $T_x M$ pour tout $x \in \gamma$. Dans cette définition, nous considérons d'abord le fibré normal au champ de vecteurs, et ensuite le quotient par $\mathbb{R}_+$. Soit alors K une réunion finie d'orbites périodiques. Nous pouvons retirer de notre variété ces orbites et remplacer chacune par le tore $\mathbb{T}_\gamma$ correspondant. On obtient une nouvelle variété compacte, orientée, à bord, d'ensemble sous-jacent

$$M_K = (M \setminus K) \cup \bigcup_{\gamma \in K} \mathbb{T}_\gamma \,.$$

Le champ de vecteurs X peut être prolongé sur M_K : la linéarisation DX le long de γ induit un champ de vecteurs sur le tore $\mathbb{T}_\gamma$. Nous continuerons à noter X l'extension à M_K du champ de vecteurs X sur M. Le champ X est tangent au bord de M_K. Soit S une X-section, dont le bord est contenu dans K et telle que $\mathrm{int}(S) \cap K = \emptyset$. En considérant les directions selon lesquelles S approche le bord, on obtient une surface à bord sur M_K, que nous notons S_K.

Définition 2.4. Soit S une X-section ; notons $K = \partial S$. La X-section S est ∂-*forte* si, pour chaque $\gamma \in K$, la restriction de S_K à $\mathbb{T}_\gamma$ est une sous-variété de dimension 1 transverse au champ de vecteurs X. Une section de Birkhoff S est ∂-*forte* si c'est une X-section ∂-forte et la restriction de S_K sur chaque $\mathbb{T}_\gamma$ est une section globale pour l'extension de X [6] sur $\mathbb{T}_\gamma$.

L'intérêt de travailler avec des sections ∂-forte réside dans la régularité de l'application de premier retour associée.

Proposition 2.5. *Soit X un champ de vecteurs non singulier sur M. Si S est une section de Birkhoff ∂-forte pour X, alors l'application de premier retour sur* $\mathrm{int}(S)$ *du flot de X définit un difféomorphisme lisse de* $\mathrm{int}(S)$.

[6] *i.e.* chaque point de S_K revient en temps fini en suivant la dynamique induite par X sur S_K.

2.2. De la géométrie à la dynamique : structure et forme de contact, champ de Reeb, décomposition en livre ouvert

Ici, nous introduisons les notions principales de la géométrie de contact et de la dynamique du champ de Reeb associé. Nous expliquons les définitions de livre ouvert et livre ouvert rationnel et ses liens avec la topologie et la dynamique.

Considérons une variété M de dimension 3, orientée, sans bord. Munissons M d'un champ d'hyperplans ξ pour lequel il existe une 1-forme lisse α telle que $\xi = \ker(\alpha)$ et telle que $\alpha \wedge d\alpha$ est une forme volume. Le champ ξ est appelé *structure de contact* et la forme α qui permet de la définir est dite *forme de contact*. Plusieurs formes de contact peuvent définir la même structure de contact : en effet, dès qu'on considère une fonction lisse $f\colon M \to \mathbb{R}^*$, la forme $f\alpha$ est aussi une forme de contact qui définit la même structure de contact.

Le premier exemple auquel nous pouvons penser est $(\mathbb{R}^3, \xi_{\mathrm{std}})$, où ξ_{std} est le noyau de la forme de contact $\alpha_{\mathrm{std}} = dz - ydx$, voir Figure 1. En effet, le théorème de Darboux nous assure que pour tout point x d'une variété de contact (M, ξ) de dimension 3 il existe un voisinage U de x dans M, un voisinage U' de 0 dans $\mathbb{R}^3$ et un difféomorphisme $\varphi\colon U \to U'$ tels que $\varphi^*\xi_{\mathrm{std}} = \xi$. Toute variété de dimension 3, lisse, compacte, admet une structure de contact, voir Martinet (1971) et Lutz (1971).

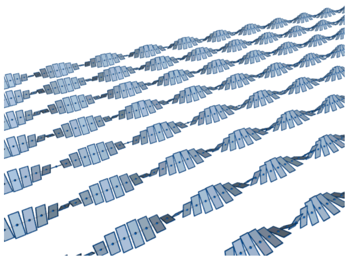

Figure 1 – La structure de contact standard sur $\mathbb{R}^3$ (image de P. Massot).

En fixant la forme de contact α qui définit ξ, nous pouvons définir un champ de vecteur R_α, dit *de Reeb*, comme suit :

$$\begin{cases} d\alpha(R_\alpha, \cdot) = 0\,, \\ \alpha(R_\alpha) = 1\,. \end{cases} \tag{1}$$

Le flot (ϕ_t^α) associé au champ de Reeb est dit *flot de Reeb*. En fixant α_{std} sur $(\mathbb{R}^3, \xi_{\mathrm{std}})$, le champ de Reeb associé est $\frac{\partial}{\partial z}$ et le flot de Reeb est le flot de translation le long de la direction z. Une classe d'exemples de flots de Reeb est constituée par les flots géodésiques sur une surface riemannienne (S, g). Dans ce cas, la forme de contact sur le fibré tangent unitaire peut être explicitée de la manière suivante

$$\alpha_{(x,v)}(\cdot) = g_x(v, d\pi_{(x,v)}(\cdot)) \qquad \forall (x,v) \in T_g^1 S\,,$$