Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4^e^ série, t. 45, 2012, p. 985 à 1025

CARACTÈRES SEMI-SIMPLES DE $\mathrm{G}_2(F)$, F CORPS LOCAL NON ARCHIMÉDIEN

PAR LAURE BLASCO ET CORINNE BLONDEL

RÉSUMÉ. – Soit F un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle différente de 2 et 3. Nous définissons strates semi-simples et caractères semi-simples pour le groupe exceptionnel $\mathrm{G}_2(F)$ à l'aide des objets analogues pour le groupe $\mathrm{SO}(8, F)$, des automorphismes de trialité et d'une correspondance de Glauberman. Nous construisons alors les types semi-simples associés et nous donnons des conditions suffisantes pour que ces types s'induisent irréductiblement, obtenant ainsi des représentations supercuspidales du groupe $\mathrm{G}_2(F)$.

ABSTRACT. – Let F be a local non archimedean field of residual characteristic different from 2 and 3. We define semisimple strata and semisimple characters for the exceptional group $\mathrm{G}_2(F)$, using the analogous objects for the group $\mathrm{SO}(8, F)$, the triality automorphisms and a Glauberman correspondence. We then construct the associated semisimple types and give sufficient conditions for those types to induce irreducibly, thus obtaining supercuspidal representations of the group $\mathrm{G}_2(F)$.

Introduction

Grâce aux travaux de C. J. Bushnell et P. C. Kutzko, nous connaissons une description de nature arithmétique des représentations complexes irréductibles supercuspidales des groupes linéaires sur un corps local non archimédien F [5]. Plus récemment, S. Stevens a décrit de manière semblable les représentations complexes irréductibles supercuspidales des groupes classiques lorsque la caractéristique résiduelle de F est différente de 2 [19]. Ces descriptions reposent sur la notion de *caractère simple* ou *semi-simple*, selon le groupe considéré, et s'effectuent principalement en trois étapes : la définition des caractères simples ou semi-simples et l'étude de leurs propriétés ; la construction de représentations irréductibles du normalisateur d'un caractère simple ou semi-simple contenant ce caractère ; la démonstration que toute représentation irréductible supercuspidale s'obtient par induction compacte (modulo le centre) à partir d'une des représentations précédentes.

L'intérêt de telles descriptions est au moins double. D'une part, elles sont établies par des arguments algébriques et se prêtent donc à des constructions dans le cadre plus large des représentations à coefficients dans un anneau où la caractéristique résiduelle de F est inversible.

C'est ainsi que les caractères semi-simples des groupes linéaires ou classiques interviennent de manière cruciale dans la démonstration du deuxième théorème d'adjonction conçue par J.-F. Dat [7]. D'autre part, ces descriptions en parallèle sur différents groupes offrent l'espoir d'obtenir une bonne notion de transfert de caractères semi-simples qui aiderait à décrire certaines fonctorialités.

Dans cet article, nous reprenons cette démarche afin de décrire les représentations complexes supercuspidales du groupe exceptionnel $\mathrm{G}_2(F)$. Nous réalisons les deux premières étapes et obtenons une série particulière de représentations irréductibles de sous-groupes ouverts compacts, les *types semi-simples de* $\mathrm{G}_2(F)$. Nous concluons par l'énoncé de conditions suffisantes portant sur les types semi-simples pour que leurs induites compactes à $\mathrm{G}_2(F)$ soient des représentations supercuspidales (théorème 3.13). Nous espérons montrer, dans un article ultérieur, que toutes les représentations irréductibles supercuspidales de $\mathrm{G}_2(F)$ sont bien de cette forme.

Notons que J.-K. Yu a déjà donné une construction générale de représentations supercuspidales des groupes réductifs p-adiques [21] dont Ju-Lee Kim a montré l'exhaustivité [9] par des arguments analytiques. L'ensemble nécessite que la caractéristique résiduelle p de F soit suffisamment grande. Ici, nous supposons simplement qu'elle est différente de 2 et 3.

Le groupe $\mathrm{G}_2(F)$ est le groupe des automorphismes d'une algèbre d'octonions V sur F munie de sa norme et s'identifie ainsi à un sous-groupe du groupe orthogonal déployé $\mathrm{SO}_F(V)$. Il est aussi le groupe des points fixes de $\mathrm{Spin}_F(V)$ sous l'action d'un groupe d'automorphismes d'ordre 6 dit groupe de trialité. L'action du groupe de trialité n'est pas définie sur $\mathrm{SO}_F(V)$ mais peut l'être sur ses pro-p-sous-groupes. L'idée est alors de construire les caractères semi-simples de $\mathrm{G}_2(F)$ à partir de ceux de $\mathrm{SO}_F(V)$ à l'aide d'une correspondance de Glauberman pour le groupe de trialité (théorème 2.21), tout comme S. Stevens a construit les caractères semi-simples des groupes classiques à partir de ceux du groupe linéaire en utilisant l'automorphisme d'adjonction [18]. Dès cette étape, l'exclusion des caractéristiques résiduelles 2 et 3 s'impose.

La deuxième étape se déroule parallèlement à [19, §§3.2 à 4.1] : les constructions de représentations de pro-p-groupes utilisent la trialité et la correspondance de Glauberman – les calculs d'entrelacement exigent toutefois de nouvelles méthodes puisqu'il n'existe pas pour $\mathrm{G}_2(F)$ une transformée de Cayley aux bonnes propriétés (remarque 2.14) –, tandis que la partie de niveau 0 fait intervenir des quotients réductifs qui sont tous des groupes classiques ou de type G_2 définis sur le corps résiduel.

Ce schéma simple nécessite un grand nombre de préparatifs et détours que nous présentons maintenant avec plus de détails dans le plan de l'article.

La première partie définit et étudie les *strates semi-simples* $[\Lambda, n, 0, \beta]$ *de* $\mathfrak{g}_2(F)$, l'algèbre de Lie de $\mathrm{G}_2(F)$. Ce sont les strates semi-simples de $\mathrm{End}_F(V)$ dont la suite de réseaux Λ correspond à un point de l'immeuble de $G_2(F)$ et l'élément β appartient à $\mathfrak{g}_2(F)$. Ce dernier est un élément semi-simple et une dérivation sur V donc son noyau V^0 est une sous-algèbre de composition de dimension paire (1.2, 1.3). On dispose alors d'une décomposition de V en somme directe de V^0 et de son orthogonal W et, lorsque V^0 est déployée de dimension 2, d'une polarisation complète de W, $W = W^+ \oplus W^-$. La décomposition de V ainsi obtenue est stable par β et scinde la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ (§ 1.2). Elle gouverne toute l'étude.

Bien évidemment, lorsque la strate est nulle, cette décomposition est triviale. Ce cas correspond au niveau zéro déjà étudié par L. Morris [12] et est oublié, ou peu s'en faut, jusqu'au dernier paragraphe (§ 3.6). Supposons donc la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ non nulle. Sa « restriction à W ou W^+ » (ici confondus sous le nom W'), c'est-à-dire la strate $[\Lambda \cap W', n, 0, \beta_{W'}]$ où $\beta_{W'}$ est la restriction de β à W', est une strate semi-simple de l'algèbre de Lie d'un sous-groupe $\bar{L}$ de $G_2(F)$ stabilisant W'. Celui-ci est isomorphe à $\mathrm{SL}(3, F)$ si V^0 est déployée de dimension 2, à $\mathrm{SU}(2,1)(F)$ si V^0 est anisotrope de dimension 2 et à $\mathrm{SO}_F(W)$ si V^0 est de dimension 4. De plus, le centralisateur $\bar{G}_\beta$ de β dans $\mathrm{G}_2(F)$ s'identifie au centralisateur de $\beta_{W'}$ dans $\bar{L}$ (§ 1.5).

La classification des strates semi-simples de $\mathfrak{g}_2(F)$ consiste alors à étudier cette « application de restriction à W' ». Le point crucial est la construction de suites de réseaux de V correspondant à un point de l'immeuble de $\mathrm{G}_2(F)$ dont les suites de réseaux de W', correspondant à un point de l'immeuble de $\bar{L}$, sont facteurs directs (§ 1.4). Ici, le langage approprié est celui des *normes* : normes de volume nul dans le cas de $\mathrm{SL}(3, F)$ [3], normes autoduales dans celui d'un groupe classique [4] et normes autoduales d'algèbre dans celui de $\mathrm{G}_2(F)$ [8]. On obtient ainsi un plongement canonique de l'immeuble de $\bar{L}$ dans celui de $\mathrm{G}_2(F)$ (propositions 1.8, 1.9, 1.10). On conclut sur une classification complète des strates semi-simples de $\mathfrak{g}_2(F)$ et un procédé d'approximation de telles strates (§ 1.6).

Suit la construction des caractères semi-simples de $\mathrm{G}_2(F)$ associés à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$, qui ne s'achève qu'au paragraphe 3. Afin d'utiliser une correspondance de Glauberman, nous devons au préalable étudier l'action du groupe de trialité Γ sur les caractères de $\mathrm{SO}_F(V)$ associés à cette strate (§ 2). Notons d'abord que la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ de $\mathrm{G}_2(F)$ est une strate semi-simple autoduale de $\mathrm{SO}_F(V)$, notion plus générale que semi-simple gauche (§ 1.2) : la définition des caractères semi-simples de $\mathrm{SO}_F(V)$ doit donc être élargie comme dans [7].

Ceci dit, l'action du groupe de trialité est complexe et son étude occupe tout le paragraphe 2. Une première raison est que l'action de Γ ne se reflète point sur l'espace V et il n'est plus clair que les filtrations de l'ordre $\mathfrak{A}(\Lambda)$ et du sous-groupe parahorique $P(\Lambda)$ soient stables sous cette action. Une deuxième raison est que la transformée de Cayley ne commute aux actions de Γ que « localement » : la description des caractères des quotients des filtrations des sous-groupes parahoriques à l'aide d'éléments de $\mathfrak{g}_2(F)$ n'est pas immédiate, ni le fait que les caractères obtenus à partir d'un élément de $\mathfrak{g}_2(F)$ soient fixes sous l'action de Γ. Ces propriétés sont établies aux paragraphes 2.2 à 2.4. Elles assurent que les sous-groupes $H^1(\beta, \Lambda)$ et $J^1(\beta, \Lambda)$ associés à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ sont stables sous l'action de Γ (lemme 2.20) et que le caractère ψ_β de $P^{[\frac{n}{2}]+1}(\Lambda)$ est fixe par trialité. Ceci est le premier pas vers une caractérisation des caractères semi-simples de $\mathrm{SO}_F(V)$ associés à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ qui restent semi-simples sous l'action de Γ : ce sont ceux qui sont fixes sous cette action (théorème 2.21). On les nomme *caractères semi-simples spéciaux de* $\mathrm{SO}_F(V)$ *associés à* $[\Lambda, n, 0, \beta]$.

On est maintenant en mesure de définir les *caractères semi-simples de* $\mathrm{G}_2(F)$ associés à $[\Lambda, n, 0, \beta]$ comme les images par la correspondance de Glauberman pour le groupe Γ des caractères semi-simples spéciaux de $\mathrm{SO}_F(V)$ associés à cette même strate (§ 3.1). Il s'agit simplement des restrictions à $\bar{H}^1(\beta, \Lambda) := H^1(\beta, \Lambda) \cap \mathrm{G}_2(F)$ des caractères semi-simples spéciaux de $H^1(\beta,\Lambda)$. Le dernier paragraphe est consacré à la deuxième partie de la construction des types semi-simples, dont le déroulement est parallèle au cas classique. Les caractères semi-simples de $\mathrm{G}_2(F)$ associés à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ jouissent des mêmes propriétés que ceux de $\mathrm{SO}_F(V)$ (§ 3.1) et déterminent une unique représentation de Heisenberg $\bar\eta$ de $\bar J^1(\beta,\Lambda) := J^1(\beta,\Lambda)\cap \mathrm{G}_2(F)$. À leur tour, les représentations de Heisenberg obtenues possèdent la propriété cruciale « d'entrelacement simple » : la dimension des espaces d'entrelacement est toujours égale à 0 ou 1 (§ 3.2). Pour l'établir, on traduit cette propriété en termes d'égalités entre certains sous-groupes de $\bar J^1(\beta,\Lambda)$ et de leurs analogues dans $\mathrm{GL}_F(V)$ et $\mathrm{SO}_F(V)$ (proposition 3.6) ce qui permet de « descendre » les résultats de $\mathrm{GL}_F(V)$ à $\mathrm{G}_2(F)$ en considérant les invariants sous l'action de l'adjonction puis sous celle du groupe de trialité (§ 3.3).

Il ne reste plus qu'à terminer la construction en étendant la représentation $\bar\eta$ au groupe $\bar J(\beta,\Lambda) := \bar P_\beta(\Lambda)\bar J^1(\beta,\Lambda)$, où $\bar P_\beta(\Lambda) = P(\Lambda)\cap \bar G_\beta$, en une représentation $\bar\kappa$ dont on contrôle l'entrelacement, dite β-extension (§ 3.5). Grâce aux propriétés de $\bar\eta$ et de l'immeuble de $\mathrm{G}_2(F)$, en particulier le lemme 3.9, et en ajoutant que le quotient $\bar J(\beta,\Lambda)/\bar J^1(\beta,\Lambda)$ est un groupe classique, la même méthode que [19] conduit à la construction de ces β-extensions (proposition 3.12). On conclut en donnant la définition des types semi-simples de $\mathrm{G}_2(F)$ (§ 3.6) et des conditions suffisantes sur ces types semi-simples pour que leurs induites à $\mathrm{G}_2(F)$ soient cuspidales (théorème 3.13).

Cette étude a démarré à la suite d'un groupe de travail sur G_2 en 2003/2005 dont nous remercions les participants, en particulier François Sauvageot qui réalisa à cette occasion une étude sur les tores qui, bien qu'invisible dans ce qui suit, en a inspiré le contenu. Nous espérons qu'une partie de la jubilation de ce groupe de travail et du plaisir que nous avons eu à mener à son terme la présente étude transparaît dans ce qui suit.

1. Strates semi-simples de $\mathfrak{g}_2(F)$

1.1. Définitions et notations relatives à G_2

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p différente de 2 et 3. On note $\mathfrak{o}_F$ son anneau d'entiers, $\mathfrak{p}_F$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}_F$ et v_F la valuation de F, d'image $\mathbb{Z}$.

Soit V l'algèbre des octonions sur F ; on notera $\mathit{1}$ son unité, Q sa norme, qui est multiplicative : $Q(xy) = Q(x)Q(y)$ $(x, y \in V)$, et f la forme bilinéaire associée, de sorte que $f(x,x) = 2Q(x)$ $(x \in V)$. On note $X^\perp$ l'orthogonal dans V d'un sous-ensemble X de V. L'anti-automorphisme d'adjonction de $\mathfrak{gl}_F(V)$ sera noté $X \mapsto \sigma(X)$ et l'automorphisme correspondant de $\mathrm{GL}_F(V)$ sera noté $\tau : \tau(g) = \sigma(g)^{-1}$.

Les propriétés de l'algèbre d'octonions sont décrites par exemple dans [15], nous rappelons simplement ici les points essentiels pour fixer les notations. Le conjugué d'un octonion x est $\bar x = f(x,\mathit{1})\mathit{1} - x$, sa trace est $\mathrm{tr}\, x = x + \bar x$, sa norme est telle que $Q(x)\mathit{1} = x\bar x = \bar x x$, et l'on a pour $x, y, z \in V$: $\overline{xy} = \bar y \bar x$ et $f(xy, z) = f(y, \bar x z) = f(x, z\bar y)$.

On considère toujours $\mathrm{G}_2(F)$, noté $\bar G$, comme le sous-groupe de $\mathrm{GL}_F(V) = \widetilde G$ formé des automorphismes d'algèbre de V. C'est aussi un sous-groupe du groupe $\mathrm{SO}_F(V)$, noté G, formé des éléments de déterminant 1 du groupe $\mathrm{O}_F(V) = \mathrm{GL}_F(V)^\tau$ des isométries de la forme quadratique Q. On notera $\mathfrak{g}_2(F)$ l'algèbre de Lie de $G_2(F)$, sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{so}_F(V)$ et de $\mathfrak{gl}_F(V)$.

1.2. Définitions et notations relatives aux strates

Soit $[\Lambda, n, r, \beta]$ une strate de $\mathrm{End}_F(V)$ [6, §3.1]. Supposons $\beta \in \mathrm{End}_F(V)$ semi-simple : le polynôme minimal de β est un produit $\prod_{i=0}^{l} \Psi_i$ de polynômes irréductibles sur F deux à deux premiers entre eux. Posons $V^i = \ker \Psi_i(\beta)$. Cela définit une décomposition de V en somme directe $V = \oplus_{i=0}^{l} V^i$, unique à l'ordre près, telle que $\beta = \sum_{i=0}^{l} \beta_i$ où β_i est la restriction de β à V^i.

Par définition [18, Definition 3.2], la strate $[\Lambda, n, r, \beta]$ est *semi-simple* dans $\mathrm{End}_F(V)$ si

- $\Lambda = \oplus_{i=0}^{l} \Lambda^i$ où $\Lambda^i(t) = \Lambda(t) \cap V^i$ $(t \in \mathbb{Z})$;
- pour $0 \leq i \leq l$ la strate $[\Lambda^i, n_i, r, \beta_i]$ est simple ou nulle, avec $n_i = r$ si $\beta_i = 0$, $n_i = -v_{\Lambda^i}(\beta_i)$ sinon ;
- pour $0 \leq i, j \leq l, i \neq j$, la strate $[\Lambda^i \oplus \Lambda^j, \max\{n_i, n_j\}, r, \beta_i + \beta_j]$ n'est pas équivalente à une strate simple ou nulle.

On dit qu'une strate $[\Lambda, n, r, \beta]$ est une *strate de* $\mathfrak{so}_F(V)$, ou *strate autoduale*, si la suite de réseaux Λ correspond à un point rationnel de l'immeuble de $\mathrm{SO}_F(V)$ (voir [2] et § 1.4) et si β appartient à $\mathfrak{so}_F(V)$. Soit $[\Lambda, n, r, \beta]$ une *strate semi-simple autoduale*. Le polynôme minimal de β est alors pair et, quitte à renuméroter, on peut répartir les polynômes irréductibles Ψ_i en deux sous-ensembles vérifiant :

- pour $0 \leq i \leq s$ le polynôme Ψ_i est pair ;
- pour $1 \leq j \leq k$ on a l'égalité $\Psi_{s+2j-1}(-X) = \Psi_{s+2j}(X)$.

Chaque sous-espace V^i pour $i \leq s$ est non dégénéré et orthogonal à tous les autres. Pour $1 \leq j \leq k$ les sous-espaces V^{s+2j-1} et V^{s+2j} sont totalement isotropes en dualité et orthogonaux aux autres, ce qui nous donne la décomposition

$$V = \left[\perp_{i=0}^{s} V^i\right] \perp \left[\perp_{j=1}^{k} (V^{s+2j-1} \oplus V^{s+2j})\right]. \tag{1.1}$$

Rappelons comme en [7, §8.2] que cette définition est plus large que celle de strate semi-simple gauche dans [19], qui correspond à $k = 0$ dans la somme précédente.

On dit enfin qu'une telle strate est une *strate semi-simple de* $\mathfrak{g}_2(F)$ si Λ correspond à un point rationnel de l'immeuble de $G_2(F)$ (voir [8] et § 1.4) et si β appartient à $\mathfrak{g}_2(F)$. Dans toute la suite ces conditions sont supposées vérifiées. On notera $\widetilde{G}_\beta$ le centralisateur de β dans $\mathrm{GL}_F(V)$ puis G_β et $\bar{G}_\beta$ ses centralisateurs dans $\mathrm{O}_F(V)$ et $G_2(F)$ respectivement.

Soit donc β un élément semi-simple de $\mathfrak{g}_2(F)$. Alors β est une dérivation de V, donc s'annule en $\mathit{1}$. Notons V^0 l'espace propre associé à la valeur propre 0 de β ; il contient $\mathit{1}$ et tous les produits de deux de ses éléments :

$$\forall x, y \in V^0, \quad \beta(xy) = \beta(x)y + x\beta(y) = 0.$$

De plus, puisque β est aussi un élément semi-simple de $\mathfrak{so}_F(V)$, le sous-espace V^0 est non isotrope et de dimension paire. C'est donc une *sous-algèbre de composition de dimension paire de* V.