

DYNAMIQUE TRANSVERSE DE LA LAMINATION DE GHYS-KENYON

par

Fernando Alcalde Cuesta, Alvaro Lozano Rojo & Marta Macho Stadler

Résumé. — À partir d'un arbre apériodique et répétitif du graphe de Cayley du groupe abélien libre à deux générateurs décrit par Kenyon, Ghys a construit un exemple de lamination minimale par surfaces de Riemann avec des feuilles euclidiennes et hyperboliques. On démontre que la dynamique transverse de cette lamination est représentée (du point de vue de la mesure) par une machine à sommer binaire. En fait, on peut décrire sa dynamique topologique transverse et montrer ainsi que la lamination de Ghys-Kenyon est affable.

Abstract (Transverse dynamics of the Ghys-Kenyon lamination). — Using an aperiodic and repetitive subtree of the Cayley graph of the free Abelian group with two generators, described by Kenyon, Ghys has constructed an example of minimal Riemann surface lamination having both Euclidean and hyperbolic leaves. We prove that the transverse dynamics of this lamination is represented (in a measurable way) by a 2-adic odometer. In fact, we can describe its topological transverse dynamics, and show that the Ghys-Kenyon lamination is affable.

1. Introduction

Il y a des laminations minimales par surfaces de Riemann où les types conformes des feuilles se mélangent. Le premier exemple a été construit par É. Ghys [4] à partir d'un arbre apériodique et répétitif décrit par R. Kenyon [7]. La construction comporte deux étapes distinctes, valables pour tout sous-graphe répétitif du graphe de Cayley \mathcal{G} d'un groupe infini de type fini G . Il s'agit d'abord de construire un espace compact, muni d'un feuilletage par graphes, puis d'obtenir une lamination par surfaces de Riemann. Soit $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$ l'ensemble des sous-graphes infinis de \mathcal{G} contenant l'élément neutre e de G . On munit \mathcal{T} de la *topologie de Gromov-Hausdorff* pour laquelle deux sous-graphes de \mathcal{G} sont proches s'ils coïncident sur une grande boule centrée

Classification mathématique par sujets (2010). — 37A20; 37C85.

Mots clefs. — Espace feuilleté, structure transverse, graphe.

Financé par Ministerio de Ciencia y Tecnología BFM2002-04439, Ministerio de Educación y Ciencia MTM2004-08214 et Universidad del País Vasco UPV 00127.310-E-14790/2002.

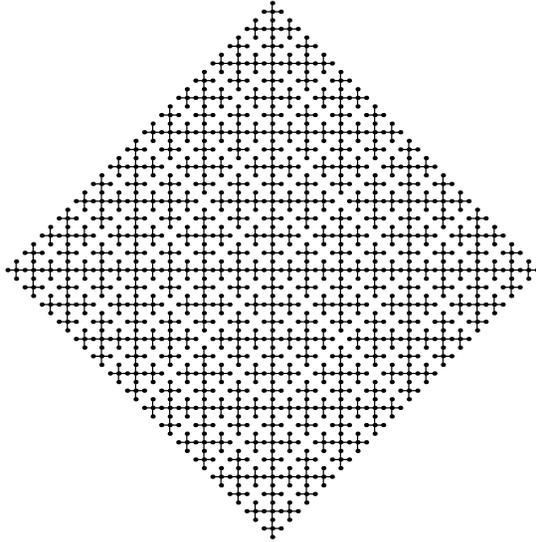


FIGURE 1. Arbre de Kenyon

en e . Puisqu'une boule ne contient qu'un nombre fini de sous-graphes, un procédé diagonal classique montre que \mathcal{T} est compact. Grâce à l'action de G sur \mathcal{G} , on définit une relation d'équivalence \mathcal{R} qui identifie un arbre T et son translaté $T' = g^{-1}.T$ si $g \in T$. On peut d'ailleurs réaliser \mathcal{T} comme un sous-espace d'un espace métrique compact $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{G})$, muni d'un feuilletage par graphes \mathcal{F} dont toutes les feuilles sont rencontrées par \mathcal{T} . Alors \mathcal{R} est induite par \mathcal{F} et les classes d'équivalence sont les ensembles de sommets des feuilles de \mathcal{F} .

Pour tout graphe $T \in \mathcal{T}$, l'ensemble $X = \overline{\mathcal{R}[T]}$ est un fermé saturé pour \mathcal{R} , appelé l'*enveloppe de T* . Il est réalisable comme transversale complète d'un espace feuilleté compact \mathbf{X} , à savoir la fermeture de la feuille $L_T \in \mathcal{F}$ passant par T . Les ensembles X et \mathbf{X} sont minimaux si et seulement si le graphe T est *répétitif*, i.e. pour tout nombre réel $r > 0$, il existe un nombre réel $R > 0$ tel que toute boule de rayon $R > 0$ contient une boule qui est l'image par translation de la boule de centre e et rayon $r > 0$. Par ailleurs, l'holonomie de L_T est triviale si et seulement si T est *apériodique*, i.e. $T \neq g.T$ pour tout élément $g \neq e$ de G . Ces définitions s'inspirent de définitions analogues pour les pavages [9, 1].

Nous appellerons *espace feuilleté de Ghys-Kenyon* la fermeture \mathbf{X} de la feuille L_{T_∞} passant par l'arbre de Kenyon T_∞ (voir la figure 1) dans l'espace $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$, munie du feuilletage induit par \mathcal{F} . Les feuilles sont des sous-arbres répétitifs et apériodiques du graphe de Cayley \mathcal{Z}^2 de \mathbb{Z}^2 . En remplaçant ces arbres par des surfaces, on obtient la lamination $(\mathbf{M}, \mathcal{L})$ décrite par É. Ghys. Nous l'appellerons *lamination de Ghys-Kenyon*. Dans ce travail, nous allons récupérer l'espace \mathbf{X} par un procédé de construction de sous-arbres répétitifs et apériodiques de \mathcal{Z}^2 à partir de suites de 4

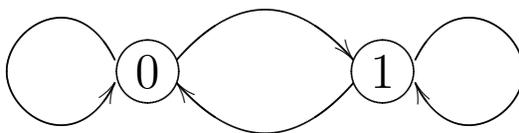


FIGURE 2. Machine à sommer binaire

éléments. Grâce à ce codage, nous montrerons que la dynamique transverse de ce feuilletage est représentée par l'automate de la fig. 2.

Cela signifie que \mathcal{R} est *stablement orbitalement équivalente* à la relation engendrée par la somme $S(x) = x + 1$ définie sur l'anneau des entiers 2-adiques, ou de manière équivalente par la transformation $T : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ définie par :

- i) si $\alpha_0 = 0$, alors $T(\alpha)_0 = 1$ et $T(\alpha)_n = \alpha_n$ pour tout $n \geq 1$,
- ii) si $\alpha_0 = 1$, alors $T(\alpha)_0 = 0$ et $T(\alpha)_1 = T(\sigma(\alpha))_0$ avec $\sigma(\alpha)_n = \alpha_{n+1}$.

Nous compléterons l'étude de l'exemple en décrivant sa dynamique topologique. Nous montrerons ainsi que \mathcal{L} est *affable*, en ce sens que \mathcal{R} est la limite inductive d'une suite de relations d'équivalence étales compactes [5]. La dynamique transverse de \mathcal{L} sera ainsi représentée par un système dynamique classique.

2. L'espace feuilleté de Gromov-Hausdorff

Soit S un système fini de générateurs de G . Le *graphe de Cayley* $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, S)$ est un graphe localement fini non orienté, sans boucle, ni arête multiple, dont les sommets sont les éléments de G . Deux sommets g_1 et g_2 sont reliés par une arête si $g_1^{-1}g_2 \in S$. On appelle *longueur* de g le plus petit nombre d'éléments de S nécessaires pour écrire g , i.e. $\text{long}_S(g) = \min\{n \geq 1 / g = s_1 \dots s_n \text{ avec } s_i s_{i+1} \neq e\}$. La *distance des S -mots* est alors donnée par $d_S(g_1, g_2) = \text{long}_S(g_1^{-1}g_2)$ pour tout couple $g_1, g_2 \in G$. Cette distance se prolonge en une distance sur \mathcal{G} telle que toute arête est isométrique à l'intervalle $[0, 1]$. Le graphe de Cayley \mathcal{G} devient ainsi un espace métrique connexe par chemins sur lequel le groupe G agit par isométries.

2.1. Topologie de Gromov-Hausdorff. — Soit $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$ l'ensemble des sous-graphes T de \mathcal{G} contenant l'élément neutre e de G . Notons $B_T(e, N)$ (resp. $\bar{B}_T(e, N)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre e et de rayon N et $\text{val}_T(e)$ la valence de e , i.e. le nombre d'arêtes issues de e . Considérons l'ensemble $A = \{ N \geq 1 / B_T(e, N) = B_{T'}(e, N) \}$ et la quantité

$$R(T, T') = \begin{cases} \sup A & \text{si } A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } A = \emptyset, \end{cases}$$

qui appartient à $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ pour tout couple $T, T' \in \mathcal{T}$. On définit alors la *distance de Gromov-Hausdorff* par $d(T, T') = e^{-R(T, T')}$. C'est une ultramétrie et donc \mathcal{T} est totalement discontinu. Puisque la boule fermée $\bar{B}_{\mathcal{G}}(e, N)$ ne contient qu'un nombre fini de sous-graphes, un procédé diagonal classique montre que \mathcal{T} est compact. Les

sous-graphes finis de \mathcal{G} correspondent aux points isolés de \mathcal{T} . Nous noterons désormais \mathcal{T} l'ensemble des sous-graphes *infinis* de \mathcal{G} contenant l'élément neutre e . L'avantage de la nouvelle définition est mise en évidence par le fait que $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$ est alors homéomorphe à l'ensemble de Cantor, sauf si $G = \mathbb{Z}$.

2.2. Structure feuilletée. — L'espace \mathcal{T} est muni d'une relation d'équivalence \mathcal{R} qui identifie deux graphes T et T' si $T' = g^{-1}.T$ avec $g \in T$. Toute classe d'équivalence $\mathcal{R}[T]$ peut être alors réalisée comme l'ensemble de sommets d'un graphe $\overline{\mathcal{R}}[T]$. Il suffit de joindre $T' = g^{-1}.T$ et $T'' = h^{-1}.T$ par une arête si $d_S(g, h) = 1$. Le graphe $\overline{\mathcal{R}}[T]$ est donc isomorphe au quotient de T par le groupe de translations $\text{Iso}(T) = \{g \in \mathcal{G}/T = g.T\}$. C'est une feuille de l'espace feuilleté compact fourni par le résultat suivant :

Théorème de réalisation géométrique 2.2.1. — *Il y a un espace compact, métrisable et séparable \mathcal{T} , muni d'un feuilletage par graphes \mathcal{G} , pour lequel \mathcal{T} est une transversale complète et \mathcal{R} est la relation d'équivalence induite sur \mathcal{T} .*

Démonstration. — Considérons le sous-espace $\widetilde{\mathcal{T}} = \{(T, g) \in \mathcal{T} \times \mathcal{G} \mid g \text{ est un sommet de } T\}$ de $\mathcal{T} \times \mathcal{G}$, muni de la pseudodistance $d((T_1, g_1), (T_2, g_2)) = d(g_1^{-1}.T_1, g_2^{-1}.T_2)$. Alors \mathcal{T} est le quotient de $\widetilde{\mathcal{T}}$ par l'action diagonale de G sur $\mathcal{T} \times \mathcal{G}$. Chaque classe d'équivalence $\mathcal{R}[T]$ est obtenue par passage au quotient à partir de l'orbite de (T, e) . L'ensemble $\widetilde{U}_{(T_1, g_1)} = \overline{B}_{\mathcal{G}}((T_1, g_1), e^{-1}) = \{(T_2, g_2) \in \widetilde{\mathcal{T}}/\overline{B}_{g_1^{-1}.T_1}(e, 1) = \overline{B}_{g_2^{-1}.T_2}(e, 1)\}$ est un ouvert-fermé qui se projette sur l'ouvert-fermé $U_{g_1^{-1}.T_1} = \overline{B}_{\mathcal{G}}(g_1^{-1}.T_1, e^{-1})$. Puisque $\overline{B}_{\mathcal{G}}(e, 1)$ ne contient qu'un nombre fini de sous-graphes, les ensembles $\widetilde{U}_{(T_1, g_1)}$ et $U_{g_1^{-1}.T_1}$ définissent des partitions finies de $\widetilde{\mathcal{T}}$ et \mathcal{T} respectivement. Nous allons remplacer $\widetilde{\mathcal{T}}$ par l'ensemble $\widetilde{\mathcal{T}}$ des couples (T, x) où x est un point quelconque de T qui peut appartenir à l'intérieur \mathring{e} d'une arête e de T . L'application $\psi_{(T_1, g_1)} : ((T_2, g_2), x) \in \widetilde{U}_{(T_1, g_1)} \times \overline{B}_{g_1^{-1}.T_1}(e, 1) \mapsto (T_2, g_2.x) \in \widetilde{\mathcal{T}}$ est injective en restriction aux ensembles $\widetilde{U}_{(T_1, g_1)} \times B_{g_1^{-1}.T_1}(e, \frac{1}{2})$ et $\widetilde{U}_{(T_1, g_1)} \times \mathring{e}$. Leurs images $\widetilde{V}_{(T_1, g_1)}$ et $\widetilde{V}_{(T_1, g_1)}^e$ sont munies de topologies telles que les restrictions et leurs inverses $\widetilde{\varphi}_{(T_1, g_1)} : \widetilde{V}_{(T_1, g_1)} \rightarrow \widetilde{U}_{(T_1, g_1)} \times B_{g_1^{-1}.T_1}(e, \frac{1}{2})$ et $\widetilde{\varphi}_{(T_1, g_1)}^e : \widetilde{V}_{(T_1, g_1)}^e \rightarrow \widetilde{U}_{(T_1, g_1)} \times \mathring{e}$ sont des homéomorphismes. On munit $\widetilde{\mathcal{T}}$ de la topologie faible pour laquelle $\widetilde{V}_{(T_1, g_1)}$ et $\widetilde{V}_{(T_1, g_1)}^e$ forment un recouvrement ouvert fini. On vérifie aisément que :

- i) l'espace $\widetilde{\mathcal{T}}$ est réalisé comme un sous-espace compact de $\widetilde{\mathcal{T}}$,
- ii) l'action de G sur $\widetilde{\mathcal{T}}$ s'étend en une action de G sur $\widetilde{\mathcal{T}}$,
- iii) les cartes locales $\widetilde{\varphi}_{(T_1, g_1)}$ et $\widetilde{\varphi}_{(T_1, g_1)}^e$ forment un atlas feuilleté sur $\widetilde{\mathcal{T}}$ qui définit un feuilletage par graphes $\widetilde{\mathcal{T}}$ invariant par l'action de G .

Soit \mathcal{T} le quotient de $\widetilde{\mathcal{T}}$ par l'action de G . Alors les applications

$$\psi_{g_1^{-1}.T_1} : (g_2^{-1}.T_2, x) \in U_{g_1^{-1}.T_1} \times \overline{B}_{g_1^{-1}.T_1}(e, 1) \mapsto x^{-1}.(g_2^{-1}.T_2) \in \mathcal{T}$$

définissent des cartes locales

$$\varphi_{g_1^{-1}.T_1} : V_{g_1^{-1}.T_1} \rightarrow U_{g_1^{-1}.T_1} \times B_{g_1^{-1}.T_1}(e, \frac{1}{2}) \quad \text{et} \quad \varphi_{g_1^{-1}.T_1}^e : V_{g_1^{-1}.T_1}^e \rightarrow U_{g_1^{-1}.T_1} \times \mathring{e}$$

et donc l'espace \mathcal{T} possède un atlas feuilleté fini. Il est compact car les plaques sont relativement compactes et les transversales sont compactes. \square

2.3. Structure transverse. — Nous allons préciser ici la notion de *dynamique transverse* (*mesurable* ou *topologique*) utilisée dans la introduction. D'abord, la relation d'équivalence \mathcal{R} est définie par l'action d'un pseudogroupe de transformations Γ engendré par les translations $\tau_g : T \mapsto g^{-1}.T$ associées aux éléments de G . Chacune de ces applications est définie sur l'ouvert-fermé $D_g = \{T \in \mathcal{T}/g \in T\}$ de \mathcal{T} . Le théorème 2.2.1 montre que Γ est le *pseudogroupe d'holonomie de \mathcal{T} réduit à \mathcal{T}* . Nous utiliserons donc la notion de *dynamique transverse* introduite par A. Haefliger [6].

Néanmoins, si l'holonomie est triviale, la dynamique transverse est représentée par la relation d'équivalence induite sur toute transversale complète. Rappelons qu'une relation d'équivalence \mathcal{R} sur un espace borélien standard X est *mesurable discrète* si les classes d'équivalence sont dénombrables et si le graphe est un borélien de $X \times X$. On appelle *transformation partielle de \mathcal{R}* tout isomorphisme borélien $\varphi : A \rightarrow B$ entre parties boréliennes de X dont le graphe $G(\varphi) = \{(x, y) \in X \times X/y = \varphi(x)\} \subset \mathcal{R}$. Une mesure borélienne μ sur X est dite *invariante pour \mathcal{R}* si elle est invariante pour toute transformation partielle φ , i.e. $\mu(\varphi^{-1}(B')) = \mu(B')$ pour tout borélien $B' \subset B$. La relation d'équivalence \mathcal{R} sur $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$ est mesurable discrète car les classes d'équivalence sont dénombrables et le graphe de \mathcal{R} est un borélien de $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ en tant que réunion des graphes des transformations partielles τ_g définies sur les ouverts-fermés $\overline{B}_{\mathcal{T}}(T, e^{-1})$ (avec $g \in \overline{B}_T(e, 1)$) et de leurs compositions.

Définition 2.3.1. — Deux relations d'équivalence mesurées (\mathcal{R}, X, μ) et (\mathcal{R}', X', μ') sont dites :

- i) *orbitalement équivalentes* si X et X' contiennent des boréliens Y et Y' saturés pour \mathcal{R} et \mathcal{R}' et de mesure totale pour lesquels il existe un isomorphisme borélien $\varphi : Y \rightarrow Y'$ tel que $\varphi(\mathcal{R}[x]) = \mathcal{R}'[\varphi(x)]$ pour μ -presque tout $x \in Y$ et $f_*\mu \sim \mu'$;
- ii) *stablement orbitalement équivalentes* si X et X' contiennent des boréliens Y et Y' dont les saturés pour \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont de mesure totale tels que les relations d'équivalence induites $\mathcal{R}|_Y$ et $\mathcal{R}'|_{Y'}$ sont orbitalement équivalentes. Nous dirons alors que \mathcal{R} et \mathcal{R}' représentent une même *dynamique mesurable*.

Toute relation d'équivalence \mathcal{R} sur un espace borélien ou topologique X est munie d'une structure naturelle de groupoïde caractérisée par les données suivantes : l'inclusion $\varepsilon : x \in X \mapsto (x, x) \in \mathcal{R}$ de l'espace des unités X dans \mathcal{R} , les projections $\beta : (x, y) \in \mathcal{R} \mapsto x \in X$ et $\alpha : (x, y) \in \mathcal{R} \mapsto y \in X$, l'ensemble des couples composables $\mathcal{R} * \mathcal{R} = \{((x, y), (x', y')) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}/\alpha(x, y) = y = x' = \beta(x', y')\}$, la multiplication partielle $\mu : ((x, y), (x', y')) \in \mathcal{R} * \mathcal{R} \mapsto (x, y')$ et l'inversion