336 ASTÉRISQUE

2011

NEUMANN AND DIRICHLET HEAT KERNELS IN INNER UNIFORM DOMAINS

Pavel Gyrya & Laurent Saloff-Coste

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France.

Numéro 336, 2011

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 30 € ($ 45)

Abonnement Europe : 463 €, hors Europe : 512 € ($ 768)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-306-5

Directeur de la publication : Aline BONAMI

336

ASTÉRISQUE

2011

NEUMANN AND DIRICHLET HEAT KERNELS IN INNER UNIFORM DOMAINS

Pavel Gyrya & Laurent Saloff-Coste

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Pavel Gyrya
Department of Mathematics, Cornell University, Ithaca, New York 14853
pavel.gyrya@cornell.edu

Laurent Saloff-Coste
Department of Mathematics, Cornell University, Ithaca, New York 14853
lsc@math.cornell.edu

***Classification mathématique par sujet* (2000).** — 31C256, 35K20, 58J35, 60J60; 31C12 58J65, 60J45.

Mots-clefs. — Noyau de chaleur, condition aux limites de Dirichlet, domaines intérieurs uniformes, espaces de Dirichlet, inégalités de Harnack.

NEUMANN AND DIRICHLET HEAT KERNELS IN INNER UNIFORM DOMAINS

Pavel Gyrya, Laurent Saloff-Coste

Abstract. — This monograph focuses on the heat equation with either the Neumann or the Dirichlet boundary condition in unbounded domains in Euclidean space, Riemannian manifolds, and in the more general context of certain regular local Dirichlet spaces. In works by A. Grigor'yan, L. Saloff-Coste and K-T. Sturm, the equivalence between

— the parabolic Harnack inequality,
— the two-sided Gaussian heat kernel estimate,
— the Poincaré inequality and the volume doubling property,

is established in a very general context. We use this result to provide precise two-sided heat kernel estimates in a large class of domains described in terms of their inner intrinsic metric and called inner (or intrinsically) uniform domains. Perhaps surprisingly, we treat both the Neumann boundary condition and the Dirichlet boundary condition using essentially the same approach albeit with the additional help of a Doob's h-transform in the case of Dirichlet boundary condition.

The main results are new even when applied to Euclidean domains with smooth boundary where they capture the global effect of the condition of inner uniformity as, for instance, in the case of domains that are the complement of a convex set in Euclidean space.

***Résumé* (Le noyau de la chaleur avec condition de Neumann ou de Dirichlet dans les domaines intérieurement uniformes).** — Ce texte traite de l'étude du noyau de la chaleur avec condition de Neumann ou condition de Dirichlet au bord dans les domaines euclidiens non-bornés, mais aussi les domaines non-bornés dans les variétés riemanniennes et, plus généralement, les domaines non-bornés de certain espaces de Dirichlet réguliers locaux.

Les travaux de A. Grigor'yan, L. Saloff-Coste et K-T. Sturm, ont montré l'équivalence, dans un large contexte, des propriétés suivantes:

— l'inégalité de Harnack parabolique,
— les estimations gaussiennes du noyau de la chaleur,

— l'inégalité de Poincaré et la propriété de doublement du volume.

Nous utilisons ce résultat pour obtenir des estimations précises du noyau de la chaleur pour une large classe de domaines définis en termes de leur distance intrinsèque et appelés domaines intérieurement (ou intrinséquement) uniformes. De façon peut être surprenante, nous traitons le problème avec la condition de Neumann au bord et celui avec la condition de Dirichlet au bord par la même approche, mais avec l'aide supplémentaire d'une transformation de Doob dans le cas de la condition de Dirichlet.

Les résultats principaux que nous obtenons sont nouveaux même dans le cas des domaines euclidiens a bord régulier où ils capturent l'effet de la condition d'uniformité intérieure comme, par exemple, dans le cas des domaines qui sont le complement d'un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$.

CONTENTS