Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

LES ESPACES DE BERKOVICH SONT ANGÉLIQUES

Jérôme Poineau

Tome 141
Fascicule 2

2013

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 267-297

Bull. Soc. math. France
141 (2), 2013, p. 267–297

LES ESPACES DE BERKOVICH SONT ANGÉLIQUES

PAR JÉRÔME POINEAU

RÉSUMÉ. — Bien que les espaces de Berkovich définis sur un corps trop gros ne soient, en général, pas métrisables, nous montrons que leur topologie reste en grande partie gouvernée par les suites : tout point adhérent à une partie est limite d'une suite de points de cette partie et les parties compactes sont séquentiellement compactes. Notre preuve utilise de façon essentielle l'extension des scalaires et nous en étudions certaines propriétés. Nous montrons qu'un point d'un disque peut être défini sur un sous-corps de type dénombrable et que, lorsque le corps de base est algébriquement clos, tout point est universel : dans une extension des scalaires, il se relève canoniquement.

ABSTRACT (*Berkovich spaces are angelic*). — Although Berkovich spaces may fail to be metrizable when defined over too big a field, we prove that a large part of their topology can be recovered through sequences: for instance, limit points of subsets are actual limits of sequences and compact subsets are sequentially compact. Our proof uses extension of scalars in an essential way and we need to investigate some of its properties. We show that a point in a disc may be defined over a subfield of countable type and that, over algebraically closed fields, every point is universal: in an extension of scalars, it may be canonically lifted.

Texte reçu le 27 avril 2011 et accepté le 20 février 2012.

JÉRÔME POINEAU, Institut de recherche mathématique avancée, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg, France • *E-mail :* `jerome.poineau@math.unistra.fr`

Classification mathématique par sujets (2010). — 14G22, 54D55, 46A50.

Mots clefs. — Espaces de Berkovich, géométrie analytique p-adique, espaces de Fréchet-Urysohn, espaces séquentiels, espaces angéliques.

L'auteur est membre du projet jeunes chercheurs « Berko » de l'Agence Nationale de la Recherche.

1. Introduction

Parmi les différentes théories d'espaces analytiques p-adiques, celle introduite par V. Berkovich se distingue entre autres par ses propriétés topologiques agréables. Mentionnons, par exemple, qu'en dépit du caractère totalement discontinu du corps de base, les espaces de Berkovich sont localement compacts, localement connexes par arcs (cf. [3]) et même localement contractiles dans de nombreux cas (cf. [4], [18]).

Pour des applications à la théorie des systèmes dynamiques, ces propriétés présentent un grand intérêt et ont déjà rendu de nombreux services (cf. [2] pour un exposé détaillé dans le cadre de la droite). Cependant, d'autres obstacles se présentent : dans ce contexte, les suites jouent un rôle prépondérant, mais leur comportement ne présente *a priori* guère de liens avec la topologie des espaces de Berkovich. En effet, lorsque leur corps de définition est trop gros, ces espaces cessent en général d'être métrisables et rien n'assure alors que les caractérisations usuelles des propriétés topologiques en termes de suites continuent de s'appliquer. Pourtant, nous allons montrer que, dans une large mesure, tel est bien le cas, allongeant ainsi la liste des propriétés topologiques remarquables des espaces de Berkovich.

Dans ce texte, nous allons précisément montrer que les espaces de Berkovich sont des espaces de Fréchet-Urysohn. Cette condition, qui signifie que tout point adhérent à une partie est limite d'une suite de points de cette partie, entraîne notamment que la notion de partie ouverte ou fermée peut se tester à l'aide de suites et que toute partie compacte (au sens où tout recouvrement ouvert possède un sous-recouvrement fini) est également séquentiellement compacte (au sens où toute suite possède une sous-suite convergente). Nous démontrerons également que les espaces de Berkovich sont angéliques, c'est-à-dire qu'ils satisfont la condition supplémentaire que leurs parties relativement ω-compactes sont relativement compactes, sous certaines conditions, toujours vérifiées pour les courbes ou les espaces provenant de variétés algébriques.

Signalons que ces résultats ont été obtenus par C. Favre dans [12] lorsque le corps de base est un corps de séries de Laurent. Nous nous affranchissons ici de cette hypothèse. Indiquons que la stratégie qu'il emploie fait intervenir des espaces de Riemann-Zariski (ce qui explique la restriction aux corps de séries de Laurent) et se distingue assez nettement de la nôtre.

Ajoutons, à présent, quelques mots sur les résultats topologiques. Dans des cas simples comme celui du disque de dimension 1, voire celui des courbes, l'on se convainc assez facilement de leur véracité. Considérons par exemple le disque unité $\mathbf{D}_k^{1,\mathrm{an}}$ sur un corps valué complet algébriquement clos k de valuation non triviale. Les k-points y sont denses et l'on construit aisément une suite de k-points convergeant vers un point donné *a priori*. Si ce point est le point de Gauß, par exemple, il suffit que les points de la suite parcourent une infinité de branches issues de ce point (autrement dit que l'ensemble des classes résiduelles dans $\tilde{k}$ des points de la suite soit infini). Un raisonnement du même style montrerait que $\mathbf{D}_k^{1,\mathrm{an}}$ est séquentiellement compact.

Cependant, la portée de ce type de techniques semble assez limitée et nous procéderons par d'autres méthodes. Les espaces de Berkovich étant construits à partir d'espaces affinoïdes, qui sont eux-mêmes des fermés de Zariski de disques, il suffit en réalité de démontrer les résultats pour les disques. Exposons en quelques mots la stratégie que nous adopterons. Étant donné un disque $\mathbf{D}_k^{n,\mathrm{an}}$ sur un corps valué complet k, nous commencerons par descendre le problème sur un sous-corps ℓ de k. Si ce corps est assez petit, le disque $\mathbf{D}_\ell^{n,\mathrm{an}}$ est métrisable et le problème est résolu. Il faut alors remonter.

Nous consacrons la section 3 aux points « que l'on peut remonter ». Ces points, que nous appelons universels, ont été introduits par V. Berkovich sous le nom de « peaked points ». Sans rentrer dans les détails, un point x d'un espace analytique X sur k est dit universel lorsque, pour toute extension valuée complète K de k, il existe un point canonique au-dessus de x dans X_K. Examinons, de nouveau, le cas où X est un disque de dimension 1 sur un corps algébriquement clos. On peut alors écrire tout point comme bord de Shilov (qui coïncide ici avec le bord topologique) d'un disque centré en un point rationnel de rayon plus petit ou comme limite de tels bords. Nous obtenons ainsi un procédé pour remonter canoniquement tous les points de X à X_K. C'est, par exemple, l'approche adoptée par X. Faber dans [11], §4.

De façon plus générale, V. Berkovich a proposé un moyen de vérifier la propriété d'universalité consistant à réaliser le point comme unique point du bord de Shilov d'un espace strictement affinoïde d'un certain type. Nous aurons besoin de généraliser ce résultat à des espaces qui ne sont pas strictement affinoïdes, ce qui oblige à remplacer les réductions classiques par des réductions graduées au sens de M. Temkin (cf. [19]). C'est pour cette raison que nous avons rédigé la section 2, où nous étendons au cadre gradué quelques résultats classiques d'algèbre commutative tel le Nullstellensatz. Nous en déduisons le résultat de « remontée » que nous recherchions : sur un corps algébriquement clos, tout point est universel.

À la section 4, nous nous intéressons spécifiquement au cas des disques. Ainsi que nous l'avons expliqué précédemment, nous montrons que nous pouvons en « descendre » les points : tout point du disque $\mathbf{D}_k^{n,\mathrm{an}}$ peut être défini (en un sens que nous précisons) sur un disque $\mathbf{D}_\ell^{n,\mathrm{an}}$, où ℓ est un sous-corps de k de type dénombrable sur son sous-corps premier. Dans ce cas, le disque $\mathbf{D}_\ell^{n,\mathrm{an}}$ est métrisable.

Nous disposons alors de tous les ingrédients pour mettre en place la stratégie exposée plus haut et en tirer quelques conséquences ayant trait à la topologie des espaces de Berkovich. C'est l'objet de la section 5.

Remerciements

Nous remercions très chaleureusement Charles Favre qui nous a posé les questions à l'origine de ce texte et nous a communiqué sa prépublication [12] sur le même sujet. Ses remarques sur le texte nous ont apporté une aide certaine et nous ont amené à éclaircir plusieurs points. Merci également à Antoine Chambert-Loir et Antoine Ducros pour leurs commentaires et conseils.

Notations

Ce texte est consacré à l'étude d'espaces analytiques au sens de V. Berkovich. Nous adopterons les notations suivantes dans tout le texte, exception faite de la section 2. La lettre k désignera un corps muni d'une valeur absolue ultramétrique pour laquelle il est complet. Nous n'excluons pas le cas de la valeur absolue triviale. Nous noterons k_p le complété du sous-corps premier de k.

Si X est un espace k-analytique et K une extension valuée complète de k, nous noterons X_K l'espace K-analytique obtenu par extension des scalaires.

Nous dirons qu'une famille finie $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ de nombres réels strictement positifs est un polyrayon k-libre si son image dans le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}_+^*/\sqrt{|k^*|}$ est une famille libre. Nous noterons $k_{\boldsymbol{r}}$ le corps constitué des séries de la forme

$$f = \sum_{\boldsymbol{m} \in \mathbf{Z}^n} \alpha_{\boldsymbol{m}}\, T_1^{m_1} \ldots T_n^{m_n},$$

avec $\alpha_{\boldsymbol{m}} \in k$, telles que la famille $(|\alpha_{\boldsymbol{m}}| r_1^{m_1} \ldots r_n^{m_n})_{\boldsymbol{m} \in \mathbf{Z}^n}$ est sommable. Muni de la norme définie par $\|f\|_{\boldsymbol{r}} = \max_{\boldsymbol{m} \in \mathbf{Z}^n}(|\alpha_{\boldsymbol{m}}| r_1^{m_1} \ldots r_n^{m_n})$, c'est un corps valué complet.

Soit $(A, \|.\|)$ une k-algèbre de Banach. L'algèbre $A \hat{\otimes}_k k_{\boldsymbol{r}}$ (cf. section 3 pour des rappels sur le produit tensoriel complété) est alors isomorphe à l'espace des séries de la forme $\sum_{\boldsymbol{m} \in \mathbf{Z}^n} a_{\boldsymbol{m}}\, T_1^{m_1} \ldots T_n^{m_n}$, avec $a_{\boldsymbol{m}} \in A$, telles que la famille $(\|a_{\boldsymbol{m}}\| r_1^{m_1} \ldots r_n^{m_n})_{\boldsymbol{m} \in \mathbf{Z}^n}$ est sommable. Muni de la norme définie par $\|f\|_{\boldsymbol{r}} = \max_{\boldsymbol{m} \in \mathbf{Z}^n}(\|a_{\boldsymbol{m}}\| r_1^{m_1} \ldots r_n^{m_n})$, c'est un espace de Banach.

Soient $\mathscr{A}$ une algèbre k-affinoïde. Tout point x du spectre analytique $X = \mathscr{M}(\mathscr{A})$ de $\mathscr{A}$ est associé à une semi-norme multiplicative bornée sur $\mathscr{A}$, que nous noterons $|.|_x$. Nous noterons $\mathfrak{p}_x$ l'idéal premier de $\mathscr{A}$ défini par

$$\mathfrak{p}_x = \{f \in \mathscr{A} \mid |f|_x = 0\},$$

$k(\mathfrak{p}_x)$ le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathscr{A}/\mathfrak{p}_x$ et $\mathscr{H}(x)$ son complété pour la valeur absolue induite par $|.|_x$.