COURS SPÉCIALISÉS

COLLECTION SMF

Représentations des groupes réductifs *p*-adiques

David RENARD

17

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES RÉDUCTIFS p-ADIQUES

David Renard

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS	EDP Sciences
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248	17, avenue du Hoggar
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940	91944 les Ulis Cedex A
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA	France
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org	www.epdsciences.com

Tarifs

Vente au numéro : 60 € ($ 90)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Cours Spécialisés
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 1284-6090

ISBN 978-2-85629-278-5

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

COURS SPÉCIALISÉS 17

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES RÉDUCTIFS p-ADIQUES

David Renard

Société Mathématique de France 2010

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE

Le but de ce livre est de présenter, sous une forme plus ou moins complète, les bases de la théorie des représentations des groupes réductifs p-adiques. Dans ce sujet se mêlent une vision géométrique, ne pouvant être développée que par l'étude soigneuse d'exemples explicites, et l'utilisation de résultats et principes très généraux, relevant de ce que les anglo-saxons appellent "l'abstract nonsense", c'est-à-dire la théorie des catégories. [1] L'un des promoteurs principaux de l'utilisation de ces techniques est J. Bernstein, à qui beaucoup de résultats fondamentaux sont dus, en particulier ceux autour de ce que l'on appelle le *centre de Bernstein.*

L'idée de départ était d'en faire une présentation telle qu'on la trouve esquissée dans les notes plus ou moins officielles de J. Bernstein [**1**], [**2**], mais qui n'a pas, à notre connaissance, été exposée complètement sous une forme publiable. Il existe des textes, plus vieux, où l'on peut trouver les bases de la théorie et la démonstration de ses principaux résultats, dus à Bernstein, Casselman, Harish-Chandra, Howe, Jacquet, Zelevinskii ([**3**], [**4**], [**21**], [**44**]). On trouve ensuite la rédaction très claire et complète de P. Deligne [**25**] des idées de Bernstein sur le "centre". Toutefois, les textes [**1**] et [**2**], postérieurs à celui de Deligne, proposent une approche sensiblement différente de ces résultats, qui nous semble encore plus élégante et de plus grande portée. D'autre part, des spécialistes du domaine ont parfois mis à disposition sur le web leur notes sur le sujet, donnant ou complétant les démonstrations de [**1**], [**2**], par exemple [**24**], [**41**]. Mais aucun de ces textes ne couvre la totalité de la théorie de Bernstein. Le besoin d'un livre se faisait donc sentir. Des conversations avec des collègues ont confirmé cette impression, ce qui m'a motivé à entreprendre cette tâche. Étant plutôt "réel" que "p-adicien", je n'étais pas le mieux placé pour ce travail, ce qui se reflète sans doute dans les imperfections de ce texte. Mais comme beaucoup le savent, le meilleur moyen d'apprendre un sujet est de l'enseigner devant des étudiants, ou d'écrire un livre dessus. J'espère tout de même que d'autres, novices ou spécialistes, en tireront profit.

Donnons maintenant un aperçu du contenu du livre, ainsi que des indications sur la manière de le lire. Chaque chapitre est précédé d'une introduction décrivant son contenu et est suivi de notes où nous avons essayé d'attribuer les résultats et indiqué les sources utilisées pour la rédaction des démonstrations. Nous serons donc brefs dans cette introduction générale.

---

[1] Le concept le plus important à cet égard est celui d'adjonction, qui s'incarne en théorie des représentations sous le nom de "réciprocité de Frobenius".

La théorie des représentations lisses des groupes réductifs p-adiques est exposée dans les chapitres VI et VII, qui constituent le cœur du livre. Les outils principaux de cette étude sont les foncteurs d'induction et de restriction paraboliques, la notion de représentation supercuspidale et les propriétés de finitude de celles-ci provenant de la structure fine des groupes réductifs p-adiques. La catégorie des représentations lisses d'un groupe réductif p-adique est étudiée au chapitre VI, où sont établis entre autres résultats le théorème de décomposition de Bernstein et la détermination du centre de cette catégorie. Le chapitre VII traite des représentations de carré intégrable, des représentations tempérées, des opérateurs d'entrelacement, et culmine avec le théorème de classification de Langlands.

Les chapitres précédents placent cette étude dans un cadre plus général: un groupe réductif p-adique est en particulier un groupe topologique totalement discontinu. La théorie des représentations de cette classe de groupes est développée dans les chapitres III et IV. Le chapitre II présente des résultats généraux de topologie des espaces totalement discontinus (fonctions, distributions, faisceaux) et des groupes totalement discontinus (mesure de Haar, convolution, algèbre de Hecke). On utilise de manière essentielle le langage de la théorie des catégories : soit G un groupe topologique totalement discontinu. L'objet d'étude principal du chapitre III est la catégorie $\mathcal{M}(G)$ des représentations lisses (*i.e.* continues) de G dans des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. On montre que cette catégorie est équivalente à celle des modules non dégénérés sur l'algèbre de Hecke de G, qui est une algèbre à idempotents. Les notions d'algèbre à idempotents et de modules non dégénérés pour une telle algèbre font l'objet du chapitre I du livre. De nombreux résultats sur la catégorie $\mathcal{M}(G)$ résultent alors immédiatement de ceux obtenus dans le cadre purement algébrique du chapitre I. En particulier, les foncteurs d'oubli et de changement de base de la théorie des modules donnent des foncteurs entre catégories de représentations lisses de groupes totalement discontinus. Le chapitre IV étudie des classes particulières de représentations : représentations compactes, unitaires, de carré intégrable modulo le centre. Les représentations compactes se comportent comme les représentations d'un groupe compact et leurs propriétés sont tout à fait essentielles à la suite de la théorie.

Pour aller plus avant, il faut restreindre la classe de groupes étudiés à des groupes possédant plus de structure. Les groupes réductifs p-adiques ont une structure très riche, qui provient d'une part de la théorie générale des groupes algébriques réductifs, et d'autre part de la théorie de Bruhat-Tits. Ces résultats de structure sont simplement rappelés dans le chapitre V. Nous avons toutefois essayé de les présenter soigneusement, en introduisant les notations nécessaires, en les ordonnant et en donnant les références précises des résultats non démontrés.

Ce livre ne se lit pas forcément linéairement. Le lecteur ayant déjà une certaine connaissance du sujet pourra commencer sa lecture directement au chapitre VI et se reporter aux chapitres précédents selon ses besoins.

Les quatre premiers chapitres demandent très peu de pré-requis mathématiques, mais une certaine familiarité avec le langage de la théorie des catégories est nécessaire. Les rudiments de cette théorie sont donnés dans l'appendice A. Les chapitres VI et VII