COURS SPÉCIALISÉS
COLLECTION SMF

Introduction à la théorie de jauge

Andrei TELEMAN

18

INTRODUCTION À LA THÉORIE DE JAUGE

Andrei Teleman

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS	EDP Sciences
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248	17, avenue du Hoggar
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940	91944 les Ulis Cedex A
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA	France
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org	www.epdsciences.com

Tarifs

Vente au numéro : 60 € ($ 90)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Cours Spécialisés
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 1284-6090

ISBN 978-2-85629-322-5

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

COURS SPÉCIALISÉS 18

INTRODUCTION À LA THÉORIE DE JAUGE

Andrei Teleman

Société Mathématique de France 2012

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 0

INTRODUCTION

Ce texte a été rédigé en suivant les deux cours de Master 2 intitulés « Introduction à la théorie de jauge » donnés par l'auteur à l'université de Provence. Il est accessible aux étudiants qui ont suivi un cours de géométrie différentielle et un cours de topologie algébrique, et qui ont des notions de base d'analyse (espaces de Sobolev, distributions, opérateurs différentiels). Nous avons introduit un appendice qui regroupe les résultats d'analyse globale (analyse sur les variétés) utilisés dans le cours.

La théorie de jauge est un domaine nouveau très actif, qui se trouve à l'intersection de la géométrie différentielle, de la topologie, de l'analyse globale et de la géométrie complexe. L'idée fondamentale de la théorie de jauge est d'étudier *les espaces de modules* des solutions de certains systèmes d'équations à dérivées partielles sur une variété différentiable et d'obtenir des informations sur la variété (par exemple des informations sur son type de difféomorphisme) à partir de ces espaces de modules.

À partir de cette idée on a obtenu les premiers résultats spectaculaires dans le domaine de la topologie différentielle 4-dimensionnelle :

- on a montré que la forme d'intersection d'une 4-variété différentiable orientée compacte est triviale sur $\mathbb{Z}$ si cette forme est définie, ce qui, d'après les résultats de Freedman concernant la classification des variétés topologiques, est totalement faux dans le contexte topologique ;

- on a introduit et calculé explicitement les premiers invariants $\mathscr{C}^\infty$ en dimension 4, à savoir *les invariants de Donaldson*, à l'aide desquels on a trouvé les premières *paires exotiques* (paires de 4-variétés différentiables orientées, qui sont homéomorphes mais non difféomorphes).

Il est intéressant de noter que les premières paires exotiques ont été trouvées dans une classe très spéciale et très importante de 4-variétés : les surfaces algébriques complexes.

En 1994 une nouvelle théorie de jauge, *la théorie de Seiberg-Witten*, a été élaborée. Tandis que le point de départ de la théorie de Donaldson est l'équation d'anti-autodualité pour une connexion dans un fibré principal de groupe structural compact (par exemple $\mathrm{SU}(2)$ ou $\mathrm{PU}(2)$), dans la théorie de Seiberg-Witten on étudie les équations de Seiberg-Witten (les équations de monopole) pour une paire formée par une U(1)-connexion et un spineur.

L'équation d'anti-dualité, ainsi que les équations de Seiberg-Witten ont des interprétations physiques. Les invariants de Seiberg-Witten sont plus simples à introduire et à calculer que les invariants de Donaldson. En effet, tandis que les espaces de modules des solutions des équations de Seiberg-Witten sont compacts, les espaces de modules de connexions anti-autoduales ne le sont pas en général, et la construction d'une compactification canonique avec de bonnes propriétés est l'un des chapitres les plus difficiles de la théorie de Donaldson.

Ce cours est essentiellement dédié à la théorie de Seiberg-Witten (*qui est accessible aux étudiants*), mais il contient aussi des éléments de la théorie de Donaldson : le groupe de jauge d'un fibré principal, les équations de Yang-Mills, les équations d'anti-dualité, des exemples d'espaces de modules de connexions de Yang-Mills.

On peut utiliser ce texte pour un cours de niveau Master 2 ou École doctorale. Pour soutenir les étudiants intéressés par le sujet et pour assurer une assimilation solide du matériel, une bonne idée serait de donner en parallèle un cours d'analyse globale dédié à la théorie des opérateurs différentiels sur les variétés différentiables, un cours de topologie algébrique qui introduit les classes caractéristiques et un cours de géométrie complexe.

Le cours est structuré comme suit :

On commence par une brève introduction à la théorie de Hodge, puis on continue avec la théorie des fibrés et des connexions. Nous présentons soigneusement les notions fondamentales de connexion, courbure, réduction du groupe structural aussi bien dans le cadre des fibrés vectoriels que dans le cadre (plus abstrait) des fibrés principaux, en expliquant en détail la relation entre les deux points de vue.

On continue avec un chapitre introductif à la théorie de Yang-Mills. On introduit la fonctionnelle de Yang-Mills sur l'espace des connexions sur un fibré principal de groupe structural compact et on montre que cette fonctionnelle est minorée par un invariant topologique du fibré (la « borne topologique »). Nous étudions les connexions qui correspondent à cette borne topologique (et qui réalisent, donc, le minimum permis par « la contrainte topologique »). Le résultat fondamental de ce chapitre est une description détaillée de l'espace de modules des connexions de Yang-Mills sur un fibré hermitien en droites.

Cette partie du cours est très importante du point de vue pédagogique : elle contient des résultats importants, démontrés avec des méthodes relativement élémentaires, qui se trouvent à l'intersection de la théorie de Donaldson et de la théorie de Seiberg-Witten. De plus, on présente dans un contexte accessible, les premiers exemples d'espaces de modules de solutions d'un système différentiel sur une variété compacte. On montre de plus que la géométrie de ces espaces de modules est reliée à la topologie de la variété de base, ce qui est une idée fondamentale de la théorie de jauge.

Le chapitre 5 est dédié à la théorie des structure spinorielles (Spin et Spin^c) et aux opérateurs de Dirac sur les 4-variétés. Ces notions fondamentales sont introduites