Mémoires
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 113
Nouvelle série

GROUPES DE CHOW-WITT

Jean FASEL

2 0 0 8

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 27 € ($ 40)
Abonnement Europe : 255 €, hors Europe : 290 € ($ 435)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0249-633-X

ISBN 978-2-85629-265-5

Directrice de la publication : Aline BONAMI

MÉMOIRES DE LA SMF 113

GROUPES DE CHOW-WITT

Jean Fasel

Société Mathématique de France 2008
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

J. Fasel
D-Math, ETH Zentrum, 8092 Zürich, Switzerland.
E-mail : `jean.fasel@gmail.com`

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 13C10, 13D15, 14C15, 14C17, 18F30.
***Mots clefs*. —** groupes de Chow-Witt, classe d'Euler, fibrés vectoriels.

GROUPES DE CHOW-WITT

Jean Fasel

Résumé. — Dans ce travail, nous étudions les *groupes de Chow-Witt*. Ces groupes ont été introduits par J. Barge et F. Morel dans le but de comprendre dans quelle situation un A-module projectif P de rang égal à la dimension de A est isomorphe à un module projectif plus simple $Q \oplus A$.

Dans un premier temps, nous montrons que ces groupes satisfont à peu de choses près les propriétés fonctorielles des groupes de Chow classiques. Nous définissons ensuite pour tout $\mathcal{O}_X$-module localement libre E de rang (constant) n sur un schéma régulier X de dimension $m \geq n$ une classe d'Euler $\tilde{c}_n(E)$ qui est un raffinement de la classe de Chern maximale classique $c_n(E)$. Cette classe d'Euler satisfait elle aussi de bonnes propriétés fonctorielles. Nous obtenons en particulier que si P est un projectif de rang n sur un anneau régulier A de dimension supérieure ou égale à n tel que $P \simeq Q \oplus A$ alors $\tilde{c}_n(P) = 0$.

Nous calculons dans un second temps les groupes de Chow-Witt maximaux d'un anneau régulier de dimension 2 et d'une $\mathbb{R}$-algèbre A régulière de dimension quelconque. Il découle immédiatement de ces calculs que si P est un A-module projectif de rang n égal à la dimension de l'anneau on a $\tilde{c}_n(P) = 0$ si et seulement si $P \simeq Q \oplus A$.

Finalement nous examinons les liens entre les groupes de Chow-Witt et les groupes des classes d'Euler introduits par S. Bhatwadekar et R. Sridharan.

***Abstract* (Chow-Witt groups).** — In this work we study the *Chow-Witt groups*. These groups were defined by J. Barge et F. Morel in order to understand when a projective module P of top rank over a ring A has a free factor of rank one, *i.e.*, is isomorphic to $Q \oplus A$.

We show first that these groups satisfy the same functorial properties as the classical Chow groups. Then we define for each locally free $\mathcal{O}_X$-module E of (constant) rank n over a regular scheme X an Euler class $\tilde{c}_n(E)$ which is a refinement of the usual top Chern class $c_n(E)$. The Euler classes satisfy also good fonctorial properties. In particular, we get $\tilde{c}_n(P) = 0$ if P is a projective module of rank n over a regular ring A of dimension n such that $P \simeq Q \oplus A$.

Next we compute the top Chow-Witt group of a regular ring A of dimension 2 and the top Chow-Witt group of a regular $\mathbb{R}$-algebra A of finite dimension. For such A, we get that if P is a projective module of rank equal to the dimension of the ring then $\tilde{c}_n(P) = 0$ if and only if $P \simeq Q \oplus A$.

Finally, we examine the links between the Chow-Witt groups and the Euler class groups defined by S. Bhatwadekar and R. Sridharan.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction 1
1.1. Avertissement 3
1.2. Conventions 4
1.3. Remerciements 4

2. Le complexe en K-théorie de Milnor 5
2.1. Résumé 5
2.2. Définitions 6
2.3. Fonctorialité du complexe en K-théorie de Milnor 10

3. Le complexe de Gersten-Witt d'un schéma régulier 15
3.1. Résumé 15
3.2. Le groupe de Witt des complexes de modules localement libres 15
3.3. Le groupe de Witt des modules de longueur finie 17
3.4. Le complexe de Gersten-Witt 20
3.5. Un calcul des différentielles du complexe 25

4. Le complexe de Gersten-Witt d'un schéma de Gorenstein 27
4.1. Résumé 27
4.2. Les groupes de Witt des modules cohérents 28
4.3. Le groupe de Witt cohérent d'un anneau de Gorenstein local 30
4.4. Le complexe de Gersten-Witt d'un schéma de Gorenstein 34

5. Le morphisme de transfert 41
5.1. Résumé 41
5.2. Transferts 41
5.3. Le morphisme de complexes 43

6. Le calcul du morphisme de transfert 49
6.1. Résumé 49
6.2. Le complexe tordu par le faisceau canonique 50
6.3. Le morphisme de transfert tordu par les faisceaux canoniques 52
6.4. Le calcul explicite du transfert 55

7. Un autre calcul des différentielles du complexe 65
7.1. Résumé 65
7.2. Le cas facile 65
7.3. Le cas général 69

8. Le morphisme de transfert pour les morphismes propres 71
8.1. Résumé 71
8.2. Définition 71
8.3. Le morphisme de complexes 72

9. Complexe de Gersten-Witt et idéaux fondamentaux 83
9.1. Résumé 83
9.2. Différentielles et idéaux fondamentaux 84
9.3. Fonctorialité 86

10. Groupes de Chow-Witt d'un schéma 89
10.1. Résumé 89
10.2. La définition des groupes de Chow-Witt 90
10.3. Le groupe de Chow-Witt maximal d'une k-algèbre 97
10.4. Propriétés fonctorielles 101

11. Invariances homotopiques 107
11.1. Résumé 107
11.2. Invariance homotopique de $C(X,W)$ 107
11.3. Invariance homotopique des groupes de Chow-Witt 113

12. Produits fibrés et morphismes de complexes 115
12.1. Résumé 115
12.2. Le cas des morphismes finis 115
12.3. Le cas général 119

13. Les classes d'Euler 125
13.1. Résumé 125
13.2. Définitions 126
13.3. Propriétés 128
13.4. Le calcul de $(s_0)_*$ 130

14. La classe d'Euler d'un module projectif de rang maximal 133
14.1. Résumé 133
14.2. Homotopies de sections 133
14.3. Le calcul de $(p^*)^{-1}$ 135

15. La dimension 2 137
15.1. Résumé 137
15.2. L'homomorphisme $f : W^{lf}(A) \to W^-(A)$ 137
15.3. L'homomorphisme $\varphi : \widetilde{CH}^2(A) \to K_0^{Sp}(A)$ 144

16. Le groupe de Chow-Witt maximal d'une $\mathbb{R}$-algèbre lisse 151
16.1. Résumé 151
16.2. Premiers pas 152
16.3. Le calcul de $\widetilde{CH}^n(X_{\mathbb{R}})$ 154
16.4. La suite exacte 158

17. Les groupes des classes d'Euler 161
17.1. Résumé 161
17.2. Définition du groupe des classes d'Euler et premiers résultats 161
17.3. Le groupe des classes d'Euler noethérien 165
17.4. Quelques résultats 168

A. Théorème d'Eisenbud-Evans et Théorème de Bertini 171
A.1. Théorème d'Eisenbud-Evans 171
A.2. Théorème de Bertini 172

B. Catégories triangulées 175
B.1. Définition 175
B.2. Exemples de catégories triangulées 177

C. Le groupe de Witt d'une catégorie exacte 181
C.1. Définitions 181
C.2. Orthogonalité 182
C.3. Fonctorialité 183

D. Les groupes de Witt de catégories triangulées 185
D.1. Définitions 185
D.2. La suite exacte de localisation 188

E. Remarques sur les groupes de Witt d'un corps 193
E.1. Le groupe de Witt $W(k, L)$ 193
E.2. Le groupe de Witt $W(k, \mathrm{Ext}^n_A(k, A))$ 194

Bibliographie 195