PANORAMAS ET SYNTHÈSES 10

SUR LES INÉGALITÉS DE SOBOLEV LOGARITHMIQUES

Cécile Ané
Sébastien Blachère
Djalil Chafaï
Pierre Fougères
Ivan Gentil
Florent Malrieu
Cyril Roberto
Grégory Scheffer

Avec une préface de Dominique Bakry et Michel Ledoux

Société Mathématique de France 2000
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Cécile Ané
E-mail : ane@cict.fr
Url : http://www.lsp.ups-tlse.fr/Fp/Ane/

Sébastien Blachère
E-mail : blachere@cict.fr
Url : http://www.lsp.ups-tlse.fr/Fp/Blachere/

Djalil Chafaï
E-mail : chafai@cict.fr
Url : http://www.lsp.ups-tlse.fr/Chafai/

Pierre Fougères
Url : http://www.lsp.ups-tlse.fr/Fp/PFougeres/
E-mail : pfougere@cict.fr

Ivan Gentil
Url : http://www.lsp.ups-tlse.fr/Fp/Gentil/
E-mail : gentil@cict.fr

Florent Malrieu
Url : http://www.lsp.ups-tlse.fr/Fp/Malrieu/
E-mail : malrieu@cict.fr

Cyril Roberto
E-mail : roberto@cict.fr
Url : http://www.lsp.ups-tlse.fr/Fp/Roberto/

Grégory Scheffer
E-mail : scheffer@cict.fr
Url : http://www.lsp.ups-tlse.fr/Scheffer/

Laboratoire de Statistique et Probabilités, Université Paul Sabatier, Toulouse.

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 46-99, 60J60, 26D10, 58D25, 39B72, 58J65, 47D07, 60J10, 94A15, 94A17.

***Mots clefs.* —** Inégalité de Sobolev, entropie, semi-groupe de Markov, concentration de la mesure, transport de la mesure, chaînes de Markov, théorie de l'information.

SUR LES INÉGALITÉS DE SOBOLEV LOGARITHMIQUES

Cécile Ané, Sébastien Blachère, Djalil Chafaï, Pierre Fougères, Ivan Gentil, Florent Malrieu, Cyril Roberto, Grégory Scheffer

Avec une préface de Dominique Bakry et Michel Ledoux

Résumé. — Cet ouvrage offre un panorama sur les inégalités de SOBOLEV logarithmiques dont le champ d'application n'a cessé de croître au cours des dernières années, de l'analyse et la géométrie en dimension finie et infinie, aux probabilités et à la mécanique statistique.

Ce texte, composé de chapitres à la lecture autonome, constitue une introduction accessible au plus grand nombre sur divers aspects de l'étude de ces inégalités. L'exemple fondamental des lois de BERNOULLI et GAUSS est l'occasion d'introduire, d'après GROSS, les inégalités de SOBOLEV logarithmiques. Les propriétés d'hypercontractivité et de stabilité par produit tensoriel forment un aspect caractéristique de ces inégalités qui s'insèrent en fait dans la famille plus large des inégalités de SOBOLEV traditionnelles.

Un thème abordé est celui du critère de courbure et dimension, qui constitue un outil efficace pour l'obtention d'inégalités fonctionnelles, suivi d'un autre sur une caractérisation des mesures vérifiant des inégalités de SOBOLEV logarithmiques et de POINCARÉ sur la droite réelle à l'aide des inégalités de HARDY.

Sont étudiées ensuite les interactions avec divers domaines de l'analyse et des probabilités. Parmi elles, le phénomène de concentration de la mesure, utile aussi bien en géométrie, en probabilités discrètes, en combinatoire et en statistique. Suivent les relations récentes entre inégalités de SOBOLEV logarithmiques et inégalités de transport, qui fournissent également une autre approche de la concentration ; puis un contrôle des vitesses de convergence vers l'équilibre de chaînes de MARKOV sur des espaces finis au moyen des constantes de trou spectral et de SOBOLEV logarithmique. Le dernier chapitre est une relecture moderne de la notion d'entropie en théorie de l'information et de ses liens multiples avec la forme euclidienne de l'inégalité de SOBOLEV logarithmique gaussienne, faisant remonter la genèse de cette inégalité aux travaux de SHANNON et STAM.

L'accent est mis sur les méthodes et les propriétés examinées, plutôt que sur les cadres d'études les plus généraux. La bibliographie, sans être encyclopédique, tente de faire un point assez complet sur le sujet, avec notamment les dernières références en la matière sur chacun des chapitres.

***Abstract* (On logarithmic Sobolev inequalities). —** This book is an overview on logarithmic SOBOLEV inequalities. These inequalities turned out to be a subject of intense activity during the past years, from analysis and geometry in finite and infinite dimension, to probability theory and statistical mechanics, and many developments are still to be expected.

The book is a pedestrian approach to logarithmic Sobolev inequalities, accessible to a wide audience. It is divided into chapters of independent interest. The fundamental example of the BERNOULLI and Gaussian distributions is the starting point to logarithmic SOBOLEV inequalities as they were defined by GROSS in the mid-seventies. Hypercontractivity and tensorisation form two main aspects of these inequalities, that are actually part of the larger family of classical SOBOLEV inequalities in functional analysis.

A chapter is devoted to the curvature-dimension criterion, which is an efficient tool to establish functional inequalities. Another chapter describes a characterization of measures which satisfy logarithmic SOBOLEV or POINCARÉ inequalities on the real line, using HARDY's inequalities.

Interactions with various domains in analysis and probability are developed. A first study deals with the concentration of the measure phenomenon, useful in statistics as well as geometry. The relationships between logarithmic SOBOLEV inequalities and the transportation of measures are considered, in particular through their approach to concentration. A control of the speed of convergence to equilibrium of finite state MARKOV chains is described in terms of the spectral gap and the logarithmic SOBOLEV constants. The last part is a modern reading of the notion of entropy in information theory and of the several links between information theory and the Euclidean form of the Gaussian logarithmic SOBOLEV inequality. The genesis of this inequalities can thus be traced back in the early contributions of SHANNON and STAM.

This book focuses on the methods and the characteristics of the treated properties, rather than the most general fields of study. Chapters are mostly self-contained. The bibliography, without being encyclopedic, tries to give a rather complete state of the art on the topic, including some very recent references.

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE

Cet ouvrage présente un panorama, sous forme d'introduction accessible au plus grand nombre, autour des inégalités de Sobolev logarithmiques. Il a été rédigé par les membres d'un groupe de travail consacré à ce thème à l'Université Paul-Sabatier de Toulouse lors du printemps 1999.

Les inégalités de Sobolev logarithmiques sont devenues un outil majeur de l'analyse en dimension infinie, tout en jouant aussi un rôle en dimension finie. Nées au début des années soixante-dix avec les travaux sur l'hypercontractivité de Nelson en théorie quantique des champs, elles prennent le nom qu'elles portent aujourd'hui depuis l'article fondateur de Gross en 1975. Celui-ci établit notamment dans ce travail l'équivalence fondamentale entre hypercontractivité et inégalité de Sobolev logarithmique, et met en évidence les premiers exemples de mesures (de Bernoulli et de Gauss) pour lesquelles on dispose d'une telle inégalité. La notion d'entropie, partie prenante de la définition d'inégalité de Sobolev logarithmique, trouve néanmoins ses origines vingt cinq années plus tôt en théorie de l'information grâce aux travaux de Shannon. Une lecture moderne (menée en particulier dans ces notes) fait apparaître que l'inégalité de Sobolev logarithmique pour les mesures gaussiennes est en fait déjà présente dès les années soixante, dans les travaux de Stam et Blachman en théorie de l'information !

Les inégalités de Sobolev logarithmiques ont d'abord été établies dans le cadre gaussien. Elles ont été ensuite étendues à des situations de plus en plus générales en même temps que leur utilité dépassait largement le cadre de la théorie quantique des champs. Pour les introduire, rappelons brièvement la notion d'inégalité de Sobolev. Dans l'espace euclidien de dimension n ($\geqslant 3$), il est bien connu qu'une fonction dont le gradient est de carré intégrable est en fait dans l'espace $\mathbf{L}^p$, avec $p = 2n/(n-2)$. Plus précisément, l'espace de Sobolev $\mathbf{H}^1$ se plonge dans $\mathbf{L}^p$ à l'aide d'une inégalité (de Sobolev) qui affirme l'existence d'une constante C_n (explicite et optimale) telle que, pour toute fonction f dérivable, on ait

$$\left[\int_{R^n} |f|^{2n/(n-2)}\,dx\right]^{(n-2)/n} \leqslant C_n \int_{R^n} |\nabla f|^2\,dx.$$

Cette inégalité possède des variantes, renforcée sur l'espace hyperbolique, et plus faible sur les sphères. De même, sur une variété M riemannienne compacte de dimension n, et pour la mesure de RIEMANN associée $\mu(dx)$, nous pouvons trouver des constantes A et B dépendant de la variété telles que, pour toute fonction f dont le gradient soit de carré intégrable, on ait

$$\left[\int_M |f|^{2n/(n-2)}\,\mu(dx)\right]^{(n-2)/n} \leqslant A\int_M f^2\mu(dx) + B\int_M |\nabla f|^2\,\mu(dx).$$

Des inégalités analogues ont lieu sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$, et sur ceux des variétés riemanniennes dont la géométrie est suffisamment contrôlée.

Ces inégalités sont très utilisées dans le contrôle des solutions de nombreux types d'équations aux dérivées partielles, ainsi que dans des problèmes d'existence de solutions, car elles donnent en fait des compacités de plongements des espaces de SOBOLEV dans des espaces $\mathbf{L}^p$.

Malheureusement, ces inégalités cessent d'être valides si l'on remplace par exemple la mesure de LEBESGUE de $\mathbb{R}^n$ par la mesure gaussienne, ou par d'autres mesures qui n'ont pas une densité bornée supérieurement et inférieurement. D'autre part, elles dépendent de la dimension et sont par conséquent inutilisables dans tous les problèmes faisant intervenir un nombre infini de variables, comme par exemple les problèmes issus de la mécanique statistique, des systèmes de particules en interaction, de l'analyse en dimension infinie, sur les espaces de chemins ou de lacets.

L'exemple gaussien est emblématique du concept même d'inégalité de SOBOLEV logarithmique. Cet exemple concentre à lui seul toutes les difficultés inhérentes à la dimension infinie. Pour la mesure gaussienne standard $\gamma_n(dx)$ sur $\mathbb{R}^n$, l'inégalité de SOBOLEV logarithmique indique que, pour toute fonction f suffisamment régulière,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2\log f^2\,\gamma_n(dx) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} f^2\,\gamma_n(dx)\log\int_{\mathbb{R}^n} f^2\,\gamma_n(dx) + 2\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2\,\gamma_n(dx).$$

Dans ce cadre, si une fonction est de carré intégrable ainsi que son gradient, elle est seulement dans l'espace $\mathbf{L}^2\log\mathbf{L}^2$. Le plongement de SOBOLEV dégénère donc en un facteur logarithmique. En revanche, cette inégalité est indépendante de la dimension, et se prolongera ainsi aisément à des situations de dimension infinie.

Nous avons là un exemple typique de situation où apparaît une inégalité de SOBOLEV logarithmique. Elle s'étendra à de nombreuses autres situations en faisant varier les mesures, ou le gradient en changeant de structure riemannienne. On remplacera alors la constante 2 par d'autres constantes dépendant du modèle considéré.

L'un des avantages principaux des inégalités de SOBOLEV logarithmiques est leur propriété de tensorisation : leur existence sur deux espaces distincts assure leur validité sur l'espace produit avec pour constante le maximum des constantes initiales. Cette propriété, qui n'est pas valable pour les inégalité de SOBOLEV classiques, constitue la clé du passage en dimension infinie.

En dépit de son caractère infini-dimensionnel, les premiers travaux autour des inégalités de SOBOLEV logarithmiques restent plutôt orientés autour d'une analyse de dimension finie. Citons, par exemple, en analyse de FOURIER, les travaux de BECKNER sur la constante optimale de la norme $\mathbf{L}^p$ de la transformée de FOURIER, ou les premiers critères de convexité (critère Γ_2) de BAKRY et EMERY dans l'analyse géométrique des diffusions. Plus récemment, les résultats de DIACONIS et SALOFF-COSTE font un usage important de l'outil des inégalités de SOBOLEV logarithmiques dans l'étude de la convergence vers l'équilibre de chaînes de MARKOV sur des espaces finis. Enfin, une inégalité de SOBOLEV classique est équivalente à la donnée d'une famille d'inégalités de SOBOLEV logarithmiques (sous une forme un peu plus faible que celle donnée plus haut). Les inégalités de SOBOLEV logarithmiques permettent donc aussi l'analyse de propriétés dépendant effectivement de la dimension, comme par exemple le comportement du noyau de la chaleur en temps petit. Cette direction a été particulièrement développée par DAVIES.

Contrairement aux inégalités de SOBOLEV, les inégalités de SOBOLEV logarithmiques ne donnent pas immédiatement des résultats de compacité, ou des résultats de compacité trop faibles pour pouvoir être exploités directement. La clé de leur utilisation réside dans la propriété d'hypercontractivité. Plus précisément, la donnée d'un gradient et d'une mesure est en fait la donnée d'un semi-groupe de MARKOV associé (ou encore d'un espace de DIRICHLET). L'inégalité de SOBOLEV logarithmique est alors équivalente à une propriété de régularisation de ce semi-groupe : en tant que semi-groupe d'opérateurs, il envoie pour les temps assez grands l'espace $\mathbf{L}^2$ dans l'espace $\mathbf{L}^p$, avec des constantes et des normes qui reflètent exactement la constante de l'inégalité de SOBOLEV logarithmique. Par exemple, pour le semi-groupe $(\mathbf{P}_t)_{t\geqslant 0}$ d'ORNSTEIN-UHLENBECK dont la mesure invariante est la mesure gaussienne canonique γ_n,

$$\|\mathbf{P}_t\|_{p\to q} \leqslant 1,$$

dès que $1 < p < q < +\infty$ et $e^t \geqslant \sqrt{(q-1)/(p-1)}$. Cette propriété régularisante d'hypercontractivité joue un rôle crucial dans beaucoup de questions relatives à la vitesse de convergence à l'équilibre. En effet, alors que les propriétés spectrales ne fournissent que des convergences exponentielles en norme quadratique, l'hypercontractivité peut renforcer ces dernières en norme uniforme ou en variation totale pour fournir des estimations quantitatives efficaces dans les problèmes d'évolutions.

D'autres outils sont venus depuis se joindre aux inégalités de SOBOLEV logarithmiques pour l'analyse des espaces de DIRICHLET. L'argument de HERBST jette un pont entre les inégalités de SOBOLEV logarithmiques et les inégalités de concentration pour les mesures produits de TALAGRAND. Cette étude se poursuit aujourd'hui sous l'angle des inégalités de transport (de mesures). Ces dernières réactivent à cette occasion les liens évoqués plus haut, et très anciens donc, avec la théorie de l'information.

Avec la mécanique statistique et l'analyse sur les espaces de chemins et de lacets, les inégalités de SOBOLEV logarithmiques démontrent leur importance et leur efficacité en dimension infinie. Les résultats de STROOCK et ZEGARLINSKI sur les inégalités de SOBOLEV logarithmiques pour les systèmes de spins mettent en évidence les liens avec les conditions de mélange de DOBRUSHIN-SHLOSMAN et développent les applications à l'existence et l'unicité de mesures de GIBBS en volume infini. Les diverses contributions dans le cadre de l'analyse sur les espaces de chemins et lacets font apparaître des enjeux géométriques et topologiques. Récemment, GROSS a mené à bien un examen complet de l'hypercontractivité complexe par le biais des inégalités de SOBOLEV logarithmiques.

Il est important de noter qu'il est difficile de décrire un cadre simple qui englobe l'ensemble des situations où les objets évoqués précédemment sont utilisés, sans entrer dans des considérations techniques abstraites où le lecteur aurait toutes les chances de se perdre. C'est pourquoi les auteurs de cet ouvrage ont fait le choix de supposer l'existence d'une algèbre de fonctions stable par le semi-groupe et le générateur infinitésimal associé. Cette hypothèse technique dite d'« algèbre standard », qui s'avère délicate à établir dans le cadre général, est néanmoins facilement vérifiée dans les cas les plus simples. Par exemple, pour un semi-groupe de MARKOV sur un ensemble fini, on pourra choisir pour algèbre l'ensemble de toutes les fonctions, alors que, pour le semi-groupe de la chaleur d'une variété compacte, on pourra prendre l'ensemble de toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour le semi-groupe de la chaleur de $\mathbb{R}^n$, on pourra choisir l'ensemble des fonctions à décroissance rapide, et pour celui d'ORNSTEIN-UHLENBECK l'ensemble des fonctions à croissance lente. En revanche, sur une variété non-compacte, les fonctions à support compact ne sont pas préservées par le semi-groupe de la chaleur, et il faut (sans doute) trop de contrôle sur la géométrie pour que le semi-groupe de la chaleur préserve les fonctions à décroissance rapide.

Néanmoins, ce cadre réducteur permet de donner des schémas de démonstration simples dans un cadre unifié. La plupart des résultats présentés ici ne demandent pas en fait que toutes les conditions de l'algèbre standard soient réalisées. On peut aussi souvent s'y ramener dans des situations particulières. En mécanique statistique, par exemple, on peut établir d'abord des résultats sur des boîtes finies indépendamment de leur taille et passer ensuite à la limite. Sur les espaces de chemins, on pourra travailler d'abord sur les fonctions ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées. Sont présentés dans le texte des exemples où l'on s'affranchit explicitement de ces stabilités par le générateur et le semi-groupe postulées dans l'algèbre standard.

Cet ouvrage ne constitue pas une somme exhaustive sur le thème des inégalités de SOBOLEV logarithmiques. En particulier, l'étude de ces inégalités dans les cadres de la mécanique statistique et de l'analyse sur les espaces de chemins, d'un développement récent, n'est pas abordée. Conçu comme une introduction multiforme, il a pour but de rassembler les bases essentielles en une suite d'exposés, simples et directs, sur des thèmes variés. Le lecteur pourra trouver une introduction aux inégalités de SOBOLEV logarithmiques en mécanique statistique dans le cours d'initiation de ROYER [Roy99], les notes de synthèse de GUIONNET et ZEGARLINSKI [GZ00] et le cours de HELFFER en analyse semi-classique [Hel98] ; il trouvera aussi dans l'article de HSU [Hsu99] les résultats récents autour des inégalités de SOBOLEV logarithmiques sur les espaces de chemins et de lacets.

Chaque chapitre est pour l'essentiel autonome. Le premier présente principalement et de façon élémentaire l'inégalité de SOBOLEV logarithmique pour la loi de BERNOULLI, puis, par tensorisation et application du théorème de la limite centrale, celle pour la loi de GAUSS. Le second chapitre est consacré au théorème de GROSS qui établit l'équivalence entre inégalité de SOBOLEV logarithmique d'un générateur infinitésimal et hypercontractivité du semi-groupe associé. Il est l'occasion d'une introduction aux notions de semi-groupe et de générateur infinitésimal et définit en particulier l'hypothèse d'algèbre standard en vigueur dans l'ensemble de l'ouvrage. Le chapitre suivant traite des propriétés de stabilité par produit des inégalités de SOBOLEV logarithmiques, à la source des développements en dimension infinie. Il aborde également les questions de perturbation. Ces trois chapitres évoquent en parallèle les propriétés correspondantes des inégalités de trou spectral ou de POINCARÉ. Le quatrième chapitre présente des familles d'inégalités fonctionnelles qui interpolent entre inégalités de SOBOLEV logarithmiques et inégalités de SOBOLEV traditionnelles, ainsi que la traduction de ces dernières sur la décroissance des noyaux de transition du semi-groupe sous forme d'ultracontractivité. Le chapitre cinq est entièrement consacré au critère de courbure-dimension, qui constitue un outil efficace pour l'obtention d'inégalités de SOBOLEV (classiques et logarithmiques). Le chapitre suivant expose des caractérisations des inégalités de SOBOLEV logarithmiques et de POINCARÉ pour des mesures sur la droite réelle à l'aide des inégalités de HARDY en analyse classique. Des exemples d'applications illustrent l'efficacité de ces critères. Le chapitre sept établit le lien entre inégalité de SOBOLEV logarithmique et phénomène de concentration de la mesure à l'aide de l'argument de HERBST, qui produit des majorations gaussiennes de la distribution des fonctions lipschitziennes. Les relations récentes entre inégalités de SOBOLEV logarithmiques et de transport de la mesure font l'objet du chapitre huit, et fournissent également une autre approche à la concentration de la mesure. Le chapitre suivant étudie la vitesse de convergence vers l'équilibre de chaînes de MARKOV sur des espaces finis au moyen des constantes de trou spectral et de SOBOLEV logarithmique. En particulier, cette dernière permet, par l'intermédiaire de la propriété d'hypercontractivité, d'atteindre des vitesses de convergence optimales inaccessibles en général par des propriétés spectrales. Enfin, le dernier chapitre est une lecture moderne de la notion d'entropie en théorie de l'information et de ses liens multiples avec la forme euclidienne de l'inégalité de SOBOLEV logarithmique gaussienne, faisant remonter sa genèse aux travaux de SHANNON et STAM.

Le style direct de l'ouvrage met volontairement l'accent sur les méthodes et les caractéristiques des diverses propriétés examinées, plutôt que sur les cadres d'études les plus généraux. La bibliographie, sans être encyclopédique, fait un point assez complet sur le sujet, avec notamment les dernières références en la matière sur chacun des chapitres.

Nous sommes très heureux de préfacer, avec ces quelques lignes, cet ouvrage vivant et plein de fraîcheur sur ce thème des inégalités de SOBOLEV logarithmiques. Il constitue une introduction, facile d'accès et d'utilisation, utile à tout lecteur souhaitant découvrir ou approfondir ce sujet.

Dominique BAKRY, Michel LEDOUX,
Toulouse, septembre 2000.

AVANT-PROPOS

Nous tenons à remercier vivement Dominique Bakry et Michel Ledoux pour leur aide, leurs conseils et leurs encouragements tout au long de l'élaboration de ce projet. Ils ont été présents dès sa conception, pour définir l'objectif et les thèmes à aborder, jusqu'à sa finalisation. Nous remercions également tous les participants au groupe de travail du Laboratoire de Statistique et Probabilités de l'Université Paul-Sabatier, organisé par Pierre Del Moral et Laurent Miclo. D'autre part, nous sommes très reconnaissants aux rapporteurs pour la qualité et l'ampleur de leur travail, qui ont beaucoup apporté à cet ouvrage. Enfin, nous tenons également souligner l'énorme travail de coordination informatique effectué par Djalil Chafaï et Grégory Scheffer.