PANORAMAS ET SYNTHÈSES 12

MILIEUX ALÉATOIRES

Nina Gantert
Josselin Garnier
Stefano Olla
Zhan Shi
Alain-Sol Sznitman

édité par Francis Comets & Étienne Pardoux

Société Mathématique de France 2001
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique
et du Ministère de la Culture et de la Communication

N. Gantert
Institut für Mathematische Stochastik, Englerstr. 2, Universität Karlsruhe, 76137 Karlsruhe, Germany.
E-mail : `N.Gantert@math.uni-karlsruhe.de`

J. Garnier
Laboratoire de Statistique et Probabilités, Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4, France.
E-mail : `garnier@cict.fr`

S. Olla
Ceremade, UMR CNRS 7534, Université de Paris 9 - Dauphine, place du maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, France.
E-mail : `olla@ceremade.dauphine.fr`

Z. Shi
Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires, CNRS UMR 7599, Université Paris VI, 4 place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France.
E-mail : `zhan@proba.jussieu.fr`

A.-S. Sznitman
Mathematik, ETH-Zentrum, CH-8092 Zürich, Switzerland.
E-mail : `sznitman@math.ethz.ch`

F. Comets
Université Paris 7 – Denis Diderot, Mathématiques, Case 7012, 2 place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France.
E-mail : `comets@math.jussieu.fr`

É. Pardoux
Université de Provence – Aix–Marseille 1, CMI, 39 rue F. Joliot Curie, 13453 Marseille cedex 13, France.
E-mail : `pardoux@cmi.univ-mrs.fr`

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 60K37, 82D30 ; 60F10, 82C44.

***Mots clefs.* —** Milieux aléatoires, propagation d'ondes, mouvement brownien, obstacles poissonniens, marche aléatoire, diffusion dans un potentiel aléatoire, homogénéisation stochastique, systèmes de particules en interaction.

MILIEUX ALÉATOIRES

Nina Gantert, Josselin Garnier, Stefano Olla, Zhan Shi, Alain-Sol Sznitman

édité par Francis Comets & Étienne Pardoux

***Résumé.* —** Les milieux aléatoires constituent des modèles naturels pour des matériaux inhomogènes possédant certaines formes de régularité statistique. L'étude des processus stochastiques en milieu aléatoire est un domaine de recherche actif, et des techniques nouvelles y ont été tout récemment développées, notamment des formes mathématiques de la renormalisation. Bien au delà des modèles explicitement résolubles ou même seulement réversibles, ces techniques ont pu être appliquées dans certains cadres plus difficiles à traiter.

La session « États de la Recherche » qui s'est tenue au CIRM à Marseille en novembre 2000, visait à dresser un état de l'art dans le domaine, et à mettre au contact de ces idées une large partie de la communauté scientifique. Basé sur les notes des cours présentés lors de cette session, cet ouvrage est constitué de cinq articles, et d'une introduction générale où sont définies les notions fondamentales de probabilité utilisées tout au long de ces articles. Cette introduction, ainsi que le style des articles, doivent permettre la lecture de l'ouvrage à des mathématiciens non spécialistes.

L'article de Alain Sznitman étudie la survie du mouvement brownien au milieu d'obstacles aléatoirement répartis dans l'espace euclidien, et le comportement balistique de la marche aléatoire en milieu aléatoire sur le réseau de dimension $d \geqslant 2$, en illustrant le rôle de poches atypiques dans le milieu et celui de valeurs propres anormalement petites. Le deuxième article, par Zhan Shi, présente l'approche, par le calcul stochastique, de la marche aléatoire de Sinaï et de la diffusion dans un potentiel brownien sur la droite. Nina Gantert étudie la marche aléatoire sur l'arbre aléatoire de Galton–Watson, en particulier la probabilité d'événements rares. Stefano Olla présente l'homogénéisation stochastique, en prenant le point de vue de l'environnement vu de la particule, et des applications aux systèmes de particules en interaction. Dans le dernier article, Josselin Garnier étudie la propagation d'ondes en milieu aléatoire, la compétition des effets non-linéaires et aléatoires, et les solitons dans ce cadre.

***Abstract* (Random Media). —** Random media are natural models for non homogeneous materials which possess some kind of statistical regularity. The study of stochastic processes in random media is currently an active field of research, and new techniques have recently been developed, including mathematical forms of renormalization. Those techniques apply to models which are much more delicate than exactly soluble ones, or even reversible ones.

The session "États de la Recherche", which has been held at CIRM in Marseille in November 2000, aimed at presenting the state of the art in the field, and at exposing it to a large fraction of the scientific community. Based on the notes of the courses delivered during the session, this volume is composed of five articles, and a general introduction, where all basic notions from probability theory, used in the articles, are defined. The introduction and the style of the articles should make the volume readable by non specialists.

The article by Alain Sznitman studies the survival of Brownian motion moving among randomly located obstacles, and the ballistic behaviour of the random walk in random media on the $d \geqslant 2$–dimensional lattice. This illustrates the role of atypical pockets in the medium, and of abnormally small eigenvalues. The second article, by Zhan Shi, presents the analysis via stochastic calculus of Sinaï's random walk, and of the one dimensional diffusion in a Brownian potential. Nina Gantert studies the random walk on a random Galton–Watson tree, and in particular the probability of rare events. Stefano Olla studies random homogenization, taking the point of view of the environment seen from the particle, as well as applications to interacting particle systems. In the last article, Josselin Garnier studies wave propagation in random media, the competition between non linear and random effects, and solitons in this framework.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Cet article décrit un des paradigmes de la théorie des milieux aléatoires, à savoir « l'effet prépondérant des poches de petites valeurs propres ». Ce paradigme est discuté dans le cadre de l'étude du mouvement brownien parmi des obstacles poissonniens et des marches aléatoires en milieu aléatoire.

Plutôt que de présenter un tableau général, nous nous concentrons sur un aspect spécifique, à savoir celui des grandes déviations pour les marches aléatoires sur des arbres Galton-Watson. Nous mettons l'accent sur l'analogie avec la marche aléatoire dans un milieu aléatoire. La distance entre la particule et la racine de l'arbre satisfait les principes de grandes déviations trempés (pour un arbre fixé) et recuits (moyenné par rapport aux arbres). Notre résultat principal consiste à montrer que les deux fonctions de taux coincident. Cela est en nette opposition avec les résultats pour la marche aléatoire en milieu aléatoire uni-dimensionnel. Cet article se base sur un travail commun avec Amir Dembo, Yuval Peres et Ofer Zeitouni, *cf.* [**3**].

La marche de Sinai est une marche aléatoire récurrente en environnement aléatoire à valeurs dans Z. Dans cet article, nous présentons une vue générale sur la méthode de calcul stochastique dans l'étude de la marche de Sinai. L'outil principal est le théorème de Ray–Knight qui décrit la loi du temps local du mouvement brownien à des temps aléatoires bien choisis. La méthode permet par exemple d'établir toutes les classes de Lévy pour la marche de Sinai et de déterminer la vitesse de fuite du processus des sites favoris. Il est à noter que ce dernier problème reste ouvert à ce jour pour la marche aléatoire usuelle. Nous présentons à la fin de l'article plusieurs questions ouvertes, concernant diverses propriétés asymptotiques de la marche de Sinai.

Nous exposons ici quelques aspects de la technique basée sur *le point de vue de la particule* dans l'étude des mouvements aléatoires dans des environnements aléatoires.

Cet article est consacré à l'étude de la compétition entre des effets aléatoires et non linéaires dans les phénomènes de propagation d'ondes en milieu unidimensionnel. Après avoir rappelé des théorèmes limites sur les solutions d'équations différentielles avec des paramètres aléatoires, nous montrerons que l'intensité d'une onde transmise à travers une couche de milieu aléatoire décroît de manière exponentielle avec la taille de la couche. D'autre part, on verra grâce à la transformation de scattering inverse que, en l'absence d'inhomogénéités, certains sytèmes non linéaires comme l'équation de Schrödinger non linéaire laissent se propager des paquets d'ondes appelés solitons sans déformation et à vitesse constante. On étudie ensuite la propagation de solitons à travers des systèmes non linéaires aléatoirement perturbés.

ABSTRACTS

This article describes one of the paradigms of the theory of Random Media, namely "the preponderant effect of pockets of low eigenvalues". This paradigm is discussed in the case of Brownian motion among Poissonian obstacles, and for random walks in random environment.

Rather than giving a survey, we concentrate on one specific aspect, namely on large deviations for random walks on Galton-Watson trees. We emphasize the analogy with the Random Walk in Random Environment model. The distance of the walker from the root of the tree satisfies a large deviation principle, both in the *quenched* case, *i.e.* conditioned on the Galton-Watson tree, and in the *annealed* case, *i.e.* averaged over all trees. Our main result is that quenched and annealed rate functions coincide. This is in sharp contrast to the results for one-dimensional Random Walk in Random Environment. This article is based on joint work with Amir Dembo, Yuval Peres and Ofer Zeitouni, see [**3**].

Sinai's walk $(S_n,\ n \geqslant 0)$ is a recurrent one-dimensional nearest-neighbour random walk in random environment, and is reputed for its exotic slow movement : $S_n \approx (\log n)^2$, as n goes to infinity. The present article summarizes the approach via stochastic calculus in the study of Sinai's walk. The main tool is the Ray–Knight theorem which describes the local time process of Brownian motion stopped at some special random times. The method is very powerful. For example, it allows to establish all the possible Lévy classes for Sinai's walk and to determine the escape rate of favourite sites. It is interesting to mention

that the latter problem remains open for the usual random walk. A number of unanswered questions, which concern various asymptotic properties of Sinai's walk, are listed at the end of the article.

We will review here some aspects of the approach based on *the point of view of the particle* in the study of random motions in random environments.

This article is concerned with the competition between randomness and nonlinearity for wave propagation phenomena in the one-dimensional case. In the first part we review some asymptotic methods for stochastic differential equations with a small parameter. We apply these methods to compute the exponential decay of a wave traveling through a slab of linear and random medium. In the second part we give an introduction to the inverse scattering transform for the nonlinear Schrödinger equation. We show that there exist special solutions called solitons that can propagate without change of form or diminution of speed. We then address the problem of the propagation of a soliton through a slab of nonlinear and random medium.

PRÉFACE

Les processus aléatoires inhomogènes en espace sont à la base de modélisations réalistes de beaucoup de phénomènes réels intéressants. Dans de nombreuses situations, le milieu ambiant possède des propriétés de régularité au niveau statistique, par exemple de type stationnarité–ergodicité, ou des lois d'échelle. Il est alors naturel de le supposer lui-même aléatoire, avec des propriétés ergodiques particulières. Le thème des milieux aléatoires a suscité de nombreux travaux de recherche depuis vingt ans. Des techniques nouvelles ont été récemment développées pour la modélisation stochastique de phénomènes balistiques, de diffusions ou de propagation dans un milieu irrégulier. Les phénomènes cruciaux se déroulent à des échelles particulières et parfois multiples. Une approche mathématique de renormalisation (« coarse graining ») est alors nécessaire.

L'étude de la survie et du comportement du mouvement brownien en dimension d dans des obstacles aléatoirement répartis dans l'espace a débuté dans des travaux de Lifshits vers 1960 en théorie quantique de la matière condensée, où elle se pose sous forme spectrale pour le laplacien sur l'ensemble complémentaire des obstacles dans $\mathbb{R}^d$. C'est devenu un problème très classique à la suite des travaux retentissants de Donsker et Varadhan en 1975 à l'aide des grandes déviations. Récemment, A.-S. Sznitman a introduit pour ce problème une méthode de grossissement d'obstacles, faisant ainsi apparaître le rôle de valeurs propres très petites d'un opérateur elliptique avec potentiel aléatoire. Un intérêt de la méthode est de donner des informations trajectorielles précises sur la particule lorsqu'elle survit. Cette approche, qui s'applique aussi à la diffusion en milieu déterministe multi-échelle, permet de rendre compte de phénomènes complexes : phénomènes de piégeage ou de confinement, de saturation, de croissance, d'hétérogénéité multiéchelle, diffusion anormalement lente...

Cette approche a été ensuite développée avec succès en l'absence d'outils de la théorie du potentiel, notamment dans le cas de la marche aléatoire en milieu aléatoire, un processus qui est fortement non-réversible en dimension supérieure. Paradoxalement, une difficulté majeure dans ce cas consiste à pouvoir tirer avantage des propriétés ergodiques du milieu. La situation est mieux comprise en dimension un d'espace, et sur l'arbre : la structure simple du graphe permet des calculs exacts, et d'utiliser simplement un théorème ergodique.

Dans le cas de diffusions dans un milieu aléatoire stationnaire, les techniques d'homogénéisation stochastique permettent à présent une approche variationnelle des champs à divergence nulle, l'homogénéisation de champs aléatoires, et de processus non linéaires. L'hydrodynamique des systèmes de particules avec lois de conservation constitue un vaste champ d'applications. L'étude de la propagation des ondes en milieu aléatoire, largement motivée par les applications aux fibres optiques dans lesquelles les inhomogénéités jouent un rôle primordial, connaît un essor important. Les phénomènes apparaissant en optique non–linéaire, en particulier les solitons et leurs caractéristiques, sont eux aussi mieux compris.

Les articles rassemblés ici trouvent leur origine dans les notes des cours présentés à la session des « États de la Recherche » sur les *milieux aléatoires*, qui a eu lieu du jeudi 23 novembre au samedi 25 novembre 2000 au Centre International de Rencontres Mathématiques, à Marseille–Luminy. Tenue sous l'égide de la Société Mathématique de France, cette session avait pour but de mettre au contact de ces nouvelles méthodes, une partie de la communauté scientifique (en particulier les probabilistes, mais aussi les physiciens statisticiens, et plus largement les mathématiciens).

Analyse par article. — Dans les travaux récents sur les milieux aléatoires, de nouveaux paradigmes sont apparus. En particulier la présence de « poches atypiques » dans le milieu, où certaines valeurs propres sont anormalement basses, joue un rôle prépondérant dans certains modèles. Dans le premier article, Alain–Sol Sznitman illustre ces idées tant par l'étude de la diffusion d'un mouvement brownien dans des obstacles poissonniens, que par celui des marches aléatoires en milieu aléatoire sur le réseau $\mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 2$, ainsi que les techniques afférentes qui ont été récemment développées. Dans le premier modèle, le mouvement brownien est tué sur les obstacles, et les poches sont des « clairières » sans obstacles, où la particule peut survivre. Pour la marche aléatoire en milieu aléatoire, ces « poches » correspondent aux trappes dans lesquelles la marche se fait piéger avec une probabilité significative, et sont la cause de ralentissements et de diffusion lente. Le cas multidimensionnel est très différent du cas $d = 1$, puisque le marcheur peut alors contourner les obstacles au lieu de les traverser obligatoirement si $d = 1$. Certaines estimées cruciales de cet article sont spécifiques à la dimension supérieure. Par le jeu des fluctuations du milieu aléatoire, les poches de taille relativement petite qui exhibent des valeurs propres particulièrement basses, dominent le comportement en temps long du processus. Ce type de comportement asymptotique est extrêmement atypique pour les processus en milieu homogène déterministe. Il s'agit de propriétés qualitatives tout à fait nouvelles et, d'une certaine façon, génériques des milieux aléatoires.

La marche de Sinaï constitue un exemple bien connu de diffusion anormalement lente sur $\mathbb{Z}$: le marcheur se déplace dans un milieu neutre en moyenne, mais les fluctuations du milieu créent naturellement des barrières de potentiel. Dans le deuxième article, Zhan Shi en présente l'approche par le calcul stochastique. Le théorème de plongement de Skorohod permet en effet de représenter la marche (et certaines de ses généralisations) à l'aide d'une diffusion X,

$$dX_t = d\beta_t - (1/2)V'(X_t)dt$$

dans un potentiel V qui est lui-même (une marche) aléatoire. Les outils et résultats du calcul stochastique, permettent alors une étude très fine. Ainsi, le critère obtenu ici, caractérisant le taux de fuite du point favori de la marche (*i.e.*, le site le plus visité entre les instants 0 et n), reste sans analogue connu dans le cas de la marche aléatoire usuelle. La dimension $d = 1$ est cruciale ici, pour que la marche aléatoire en milieu aléatoire puisse se représenter à l'aide d'une diffusion réversible X, tout autant que pour pouvoir écrire cette diffusion comme un brownien changé de temps et d'échelle.

Une conjecture classique est l'égalité, en grande dimension, de certains exposants de Lyapunov qui apparaissent notamment dans le premier article. Dans les troisième article, Nina Gantert étudie la marche aléatoire sur l'arbre de Galton-Watson : l'arbre (aléatoire) constitue le milieu aléatoire lui-même, et il est d'usage de voir l'arbre comme l'analogue en dimension $d = \infty$ du réseau. Les propriétés de grandes déviations de la distance du marcheur à la racine sont établies, aussi bien dans le cas « quenched » (à environnement fixé) que « annealed » (en moyenne sur l'environnement), et les fonctions de taux sont alors les duales convexes des exposants de Lyapunov « quenched » et « annealed ». Les deux fonctions de taux coïncident dans ce cas, un résultat en faveur de la conjecture ci-dessus.

Le mouvement de particules marquées dans un système de particules en interaction constitue un exemple important de processus de Markov en milieu aléatoire. Ici les particules non marquées constituent le milieu, et il s'agit de comprendre les asymptotiques de l'environnement vu de la particule. Des techniques d'homogénéisation stochastique permettent d'établir des théorèmes ergodiques et de limite centrale. Dans le quatrième article, Stefano Olla passe en revue les résultats récents pour des processus réversibles ou non-réversibles. Dans ce dernier cas, il faut contrôler la partie antisymétrique du générateur infinitésimal par sa partie symétrique, à l'aide d'une hypothèse appelée « condition de secteur ». En général, le coefficient de diffusion est donné sous forme variationnelle, et il n'est pas immédiat d'en déduire des informations précises. Ainsi, la régularité du coefficient de diffusion de la particule marquée dans l'exclusion simple symétrique n'a été montrée que récemment, elle permet de donner un sens fort à certaines équations hydrodynamiques non-linéaires. La clé de l'approche présentée dans cet article consiste à étudier le processus constitué par « l'environnement vu de la particule », c'est à dire l'environnement translaté de telle façon à maintenir la particule à l'origine. Contrairement à la particule elle–même (dont l'évolution future dépend de l'environnement, sur lequel des informations sont contenues dans la trajectoire passée), l'environnement vu de la particule est un processus de Markov homogène. Certes il prend ses valeurs dans un espace fonctionnel. Mais lorsque l'on connaît sa probabilité invariante, on peut en déduire un théorème de la limite centrale.

Dans le dernier article, Josselin Garnier considère la propagation d'ondes unidimensionnelles à travers un milieu aléatoire. Il met en évidence la compétition entre les effets aléatoires et non-linéaires dans les phénomènes de propagation d'ondes. Le cas du milieu linéaire uni-dimensionnel aléatoire est d'abord étudié : une forme de localisation intervient, signifiant en particulier que l'intensité transmise décroît de manière exponentielle avec la taille du milieu. Mais au contraire il est connu que, en l'absence d'inhomogénéités, certains systèmes non-linéaires laissent se propager des paquets d'ondes isolés (appelés solitons) sans déformation et à vitesse constante. Le cadre choisi ici pour étudier cette compétition, est la propagation de solitons à travers des systèmes non-linéaires aléatoirement perturbés : l'équation de Schrödinger non-linéaire uni-dimensionnelle, qui modélise la propagation d'impulsions à travers des milieux non-linéaires du type fibre optique. Une méthode de perturbations stochastiques autour de la transformation du scattering inverse est développée pour l'analyse.

◇

Nous remercions les responsables de « Panoramas et Synthèses » d'avoir suscité et permis la publication de ce recueil dans leur collection. Nous remercions aussi le Centre national de la recherche scientifique, le Centre International de Rencontres Mathématiques et la Direction de la Recherche du Ministère de l'Éducation Nationale, de la Recherche et de la Technologie qui ont subventionné cette session des États de la Recherche. Enfin nous remercions les orateurs pour la qualité tant de leur exposé que de leur contribution écrite, et aussi l'auditoire, qui par son attention et ses questions a contribué au succès de ces journées.

Francis Comets et Étienne Pardoux.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans cette introduction, nous donnons des définitions précises d'un certain nombre de notions de base du calcul des probabilités utilisées dans la suite. Elle s'adresse principalement au lecteur non probabiliste, et elle rendra, nous l'espérons, ce recueil lisible par tout mathématicien non spécialiste du domaine. Dans les articles qui suivent, les auteurs utiliseront ces définitions et résultats en se contentant de renvoyer à l'introduction.

1. Variables aléatoires « i.i.d. »

Le calcul des probabilités cherche à préciser ce qui peut être prédit quant aux résultats d'une expérience aléatoire. Dans ce sens, les probabilités ont commencé historiquement à étudier le cas le plus simple d'une suite de variables aléatoires, à savoir les variables aléatoires « *indépendantes et identiquement distribuées* » , i.i.d (même acronyme qu'en anglais). Il s'agit d'une suite de variables aléatoires $\{X_n; n = 0, 1, 2, \ldots\}$ définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, qui prennent leurs valeurs dans un espace d'« états » E (par exemple E fini, $E = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^d$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^d$, ou même un espace fonctionnel), qui sont mutuellement *indépendantes*, au sens où pour tout $n > 1$, toutes fonctions $f_k : E \to \mathbb{R}$ mesurables bornées,

$$\mathbb{E} \prod_{k=1}^{n} f_k(X_k) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\, f_k(X_k),$$

et *de même loi*, au sens où la quantité $\mathbb{E} f(X_k)$, f mesurable bornée, ne dépend que de f et pas de k. La notation $\mathbb{E}$ désigne l'espérance, c'est-à-dire l'intégrale sur Ω pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$. Une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ $(d > 1)$ est souvent appelée un vecteur aléatoire.

Nous supposerons dans la suite que $E = \mathbb{R}^d$. Il est essentiel que ce soit un espace vectoriel. Ce pourrait être un espace de Hilbert, mais dans les cas plus complexes (par