PANORAMAS ET SYNTHÈSES 13

RIGIDITÉ, GROUPE FONDAMENTAL ET DYNAMIQUE

Martine Babillot

Renato Feres

Abdelghani Zeghib

avec la collaboration d'Emmanuel Breuillard

édité par Patrick Foulon

Société Mathématique de France 2002

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique
et du Ministère de la Culture et de la Communication

M. Babillot
MAPMO, UMR 6628, Université d'Orléans, BP 6759, 45067 Orléans cedex 2.
E-mail : `mbab@labomath.univ-orleans.fr`

E. Breuillard
École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris.
E-mail : `breuillard@ens.fr`

R. Feres
Department of Mathematics, Washington University, Campus Box 1146, St. Louis, MO 63130, U.S.A..
E-mail : `feres@math.wustl.edu`
Url : `http://www.math.wustl.edu/~feres/`

P. Foulon
Institut de Recherche Mathématique Avancée, UMR 7501 du C.N.R.S,
7, Rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France.
E-mail : `foulon@math.u-strasbg.fr`

A. Zeghib
CNRS, UMPA, École Normale Supérieure de Lyon, 46, allée d'Italie,
F-69364 Lyon cedex 07, France.
E-mail : `Zeghib@umpa.ens-lyon.fr`
Url : `http://umpa.ens-lyon.fr/~zeghib/`

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F72, 11J25, 11P21, 14P99, 20F67, 20H10, 22E40, 37A17, 37A25, 37A45, 37C, 37C85, 37D40, 51L99, 53C, 58H99, 93A99.

Mots clefs. — Points entiers, groupes discrets, flot géodésique et horocyclique, propriété de mélange, formule de prétrace, approximation diophantienne, forme quadratique, espace homogène, groupe de Lie semisimple, structure géométrique rigide, ensemble algébrique partiel, champ de plans tautologique, intégrabilité.

RIGIDITÉ, GROUPE FONDAMENTAL ET DYNAMIQUE

Martine Babillot, Renato Feres, Abdelghani Zeghib,
avec la collaboration d'Emmanuel Breuillard
édité par Patrick Foulon

Résumé. — Le volume présente des résultats récents sur les structures géométriques rigides en mettant l'accent sur les actions de groupes d'isométries. Que ce soit dans l'étude de la version quantitative de la conjecture d'Oppenheim ou dans celle des groupes d'isométries non élémentaires sur les variétés riemanniennes non compactes, M. Babillot nous montre l'apport de la théorie ergodique. R. Feres présente le point de vue de M. Gromov sur les structures géométriques, donne des résultats de rigidité ou de super-rigidité à la R. Zimmer et va jusqu'au théorème de Gromov sur les représentations du groupe fondamental en présence d'une structure A-rigide unimodulaire. A. Zeghib utilise les ensembles partiellement algébriques et la théorie du contrôle pour donner une nouvelle preuve du théorème de l'orbite dense-ouverte de Gromov.

***Abstract* (Rigidity, fundamental group and dynamics).** — This volume presents recent progress in the domain of geometric structures and group actions. M. Babillot shows the contribution of dynamics and ergodic theory in the analysis of the quantitative version of the Oppenheim conjecture or for discrete non-elementary isometry groups of non-compact manifolds with negative curvature. R. Feres introduces Gromov's approach to rigid geometric structures, gives various Zimmer-type super-rigidity results and presents a very nice theorem of Gromov concerning the fundamental group of analytic manifolds equipped with a unimodular A-rigid structure. A. Zeghib demonstrates how a clever use of partially algebraic sets and of control theory leads to a new simple proof of the dense-open orbit theorem.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Par analogie avec l'exemple des points à coordonnées entières du plan, on appelle dans ce texte points entiers d'une variété l'ensemble des points d'une orbite discrète d'un groupe agissant sur cette variété. On décrit plusieurs méthodes, issues de l'analyse harmonique ou des systèmes dynamiques pour estimer le nombre asymptotique de points entiers dans des boules de grand rayon. On détaille en particulier les travaux de Margulis, Duke, Rudnick, Sarnak, et ceux de Eskin, McMullen, Mozes et Shah concernant le nombre de points entiers sur des variétés algébriques homogènes, ou sur les points entiers entre deux hyperboloïdes irrationnels. On décrit également les travaux de Margulis et de Roblin sur les groupes discrets d'isométries des variétés à courbure négative. Un des outils majeurs, issu des travaux de Ratner, est illustré par une introduction à la théorie ergodique sur les espaces hyperboliques.

Le but principal de cet article est d'expliquer un résultat dû à M. Gromov reliant le groupe fondamental d'une variété compacte munie de certains types de structures géométriques, et la dynamique d'actions de groupes de Lie semi-simples qui peuvent exister sur la variété. La preuve, discutée ci-dessous en détail, rassemble dans un cadre cohérent un ensemble riche et utile de techniques de géométrie differentielle, de topologie et de théorie ergodique.

Le but de cet article est de donner une démonstration complète et nouvelle d'un théorème de M. Gromov, qui énonce que, si le pseudo-groupe des transformations locales préservant une connexion affine définie sur une variété admet une orbite dense, alors celle-ci est ouverte (et dense) ; en d'autres termes, un ouvert dense est localement homogène.

ABSTRACTS

In analogy with the fundamental example of integer points in the plane, we call lattice points of a manifold those points which belong to a fixed discrete orbit of a group acting on this manifold. We describe various methods ranging from harmonic analysis to dynamical systems to estimate the asymptotic number of lattice points in large balls. We detail the results of Margulis, Duke, Rudnick, Sarnak, and those of Eskin, McMullen, Mozes and Shah concerning lattice points on algebraic homogeneous subvarieties, or between irrational hyperboloids. We also describe the work by Margulis and Roblin on discrete groups of isometries of negatively curved manifolds. One of the main tools, due to Ratner, is introduced by a section on ergodic theory on hyperbolic spaces.

The main purpose of this article is to explain a result due to M. Gromov relating the fundamental group of a compact manifold equipped with certain types of geometric structures, and the dynamics of actions of semisimple Lie groups that the manifold can support. The proof, discussed below in detail, brings together into a coherent framework a rich and useful collection of techniques from differential geometry, topology, and ergodic theory.

The goal here is to give a new and self-contained proof of a theorem of Gromov stating that, if the pseudo-group of local transformations preserving an affine connection on a manifold has a dense orbit, then this orbit is open. In other words, an open dense subset is locally homogeneous.

PRÉFACE

Ce volume de la collection *Panoramas & Synthèses* reprend une partie des thèmes qui ont été abordés à l'occasion d'une « Session état de la recherche » qui s'est déroulée du 11 au 13 juin 1999 à l'institut de recherche mathématique avancée à Strasbourg.

Les trois textes ont pour cadre les structures géométriques et surtout les actions de certains groupes ou pseudo-groupes d'isométries. Leur juxtaposition permet d'aborder à la fois des questions quantitatives associées aux groupes fondamentaux, mais aussi d'utiliser des propriétés locales des pseudo-groupes d'isométries comme point de départ pour classifier des actions de groupes. Ces différents domaines connaissent depuis les années 80 des progrès considérables, marqués par l'apparition de nouveaux points de vue profonds et originaux.

Nous ne citerons pour exemple que les travaux de M. Gromov sur les structures géométriques rigides, ceux de G. Margulis et de R. Zimmer sur la super-rigidité et ceux de M. Ratner sur les actions de groupes unipotents. Mais décrivons maintenant plus en détail quelques uns des thèmes abordés dans ces articles.

Martine Babillot nous présente dans sa contribution un large éventail des questions de dénombrement pour des groupes discrets et une analyse comparative des méthodes les plus performantes. Une question très classique et ancienne est celle du cercle de Gauss. Il s'agit de donner une asymptotique fine du nombre de points entiers dans un disque de rayon R et de trouver un équivalent de l'erreur lorsqu'on compare ce nombre à l'aire. Des résultats de Sierpinski (1906) à ceux de Huxley (1996) en passant par Hardy et Littlewood, on découvre comment l'analyse harmonique du tore $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et la formule de Poisson sont intervenues dans la résolution de ce problème.

Martine Babillot va par la suite nous montrer comment transposer la question des points entiers à bien d'autres géométries, pour aller jusqu'aux variétés non compactes et à courbure négative variable.

Pour donner un bref aperçu des approches, nous mentionnerons deux exemples très voisins mais dont les techniques de résolutions sont déjà assez variées. Considérons l'hyperboloïde $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2 = -1,\ z \geqslant 0\}$. On veut évaluer le nombre $N(T) := \operatorname{card}(V \cap \mathbb{Z}^3 \cap B(O,T))$ des points entiers de cette variété se trouvant dans la boule $B(O,T)$ de rayon T. On observe d'abord que le groupe $\mathrm{SO}_0(2,1)$ agit transitivement sur V et que l'ensemble K des rotations d'axe Oz est le stabilisateur dans $\mathrm{SO}_0(2,1)$ du point $O_1 = (0,0,1)$. D'autre part, l'ensemble des points entiers coïncide avec l'orbite du point O_1 sous l'action du groupe $\Gamma = \mathrm{SO}_0(2,1) \cap \mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$, la métrique riemannienne induite sur V par la structure euclidienne ambiante est de courbure -1. On reconnaît en fait le disque hyperbolique. Le groupe Γ n'agit pas de manière cocompacte mais $\Gamma\backslash V$ est volume fini. Dans ce cas, un théorème de Patterson permet de conclure que $N(T) \sim 4\sqrt{2}\cdot T$ quand $T \to \infty$. Ce type d'estimation provient souvent de l'étude asymptotique de la fonction orbitale de deux points x, y de V, donnée par $N(x,y,R) = \sum_{\gamma\in\Gamma} 1_{d(\gamma\cdot x,y)\leqslant R}$, qui compte le nombre de points de l'orbite $\Gamma\cdot x$ dans la boule centrée en y et de rayon R dans la métrique induite. La fonction orbitale est, par construction, automorphe en x et y. On utilise ensuite l'analyse spectrale sur $\Gamma\backslash V$ associée au laplacien pour donner un développement asymptotique de $N(O_1, O_1, R)$ quand $R\to\infty$. Il est ici utile de voir la série $\sum_{\gamma\in\Gamma} 1_{d(\gamma\cdot x,y)}$ comme étant le noyau d'un opérateur L_Γ sur $L^2(\Gamma\backslash V)$ qui commute avec l'opérateur de Laplace. On est alors conduit à utiliser le théorème taubérien de Wiener-Ikehara.

Si maintenant, étant donné un entier $k \geqslant 1$, on veut reprendre la même question sur la variété $W_k = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2-kz^2 = 1\}$, les méthodes sont très différentes. Si k est un carré, l'arithmétique nous donne $N(T, W^k) \sim c_k\cdot T\cdot \ln T$. Si k n'est pas un carré, le comportement asymptotique de $N(T,W^k)\sim c_k\cdot T$, est obtenu par un théorème de Duke-Rudnick-Sarnak-Eskin-Mc Mullen, avec des méthodes qui préfigurent l'utilisation importante de la théorie ergodique. Dans ce cas, l'orbite sous le groupe Γ d'un point $w = g\cdot O$, $O = (0,1,0)$, rencontre le stabilisateur de w dans $\mathrm{SO}_0(2,1)$ en un groupe cyclique non trivial et est discrète. Le dénombrement de ses points se fait donc avec une fonction orbitale F_T qui est de plus invariante à droite sous l'action du groupe K. On peut donc descendre sur la surface de covolume fini $S = \Gamma\backslash \mathrm{SO}_0(2,1)/K$ (à indice 4 près). Pour tout T la fonction orbitale descendue détermine après normalisation une densité de probabilité sur S. On montre que, lorsque T tend vers l'infini, ces mesures convergent vaguement vers la mesure uniforme. Pour cela, il faut tester les mesures sur une famille de fonctions bien choisies. Le problème d'analyse spectrale est assez subtil puisque S est seulement de covolume fini. Pour obtenir une estimation, il faut ensuite montrer la convergence des densités. Cette convergence résulte de l'équirépartition des moyennes d'une fonction Γ-automorphe le long des courbes équidistantes d'une géodésique sur V laissée invariante par un élément de Γ. Ce résultat géométrique est en fait de nature ergodique. Une preuve dynamique peut en être donnée.

M. Babillot continue en décrivant des travaux de G. Margulis et M. Ratner. Elle aborde aussi la très célèbre question des formes quadratiques irrationnelles q de signatures $(p, d-p)$ avec $d > p \geqslant 1$, $d\geqslant 3$. L'ensemble des points entiers peut être vide. Le fameux résultat de G. Margulis sur la conjecture, formulée par Oppenheim est que $q(\mathbb{Z}^d)$ est dense dans $\mathbb{R}$.

L'étude quantitative qui en découle, et qui consiste à dénombrer les points entiers compris entre deux hyperboloïdes irrationnels, est connue sous le nom de version quantitative de la conjecture d'Oppenheim. La version synthétisée des résultats de

Dani et Margulis et de Eskin, Margulis et Mozes, est présentée dans un appendice écrit par *Emmanuel Breuillard*.

Renato Feres présente tout d'abord l'approche à la Gromov des structures géométriques et des différents groupes ou pseudo-groupes d'isométries. Rappelons quelques définitions. Un repère d'ordre r ou r-repère au point x d'une variété de dimension n est le r-jet d'un germe lisse de paramétrage en x. L'ensemble des repères d'ordre r en un point est une variété. De plus le fibré des r-repères est un fibré principal avec une action linéaire du groupe des r-jets de difféomorphismes d'un voisinage de l'origine de R^n. Soit V un ensemble, une structure géométrique d'ordre r est une application équivariante du fibré des r-repères dans V. On dit que c'est une A-structure si V est une variété algébrique. Une isométrie locale d'une structure géométrique d'ordre r est un difféomorphisme local suffisamment différentiable qui préserve la structure par rapport à l'action naturelle induite sur le fibré des r-repères. Tout ceci se traduit aussi en termes de germes d'isométries. La notion infinitésimale qui s'avère très utile est celle de k-jet d'isométrie : $\mathrm{Is}^k(x,y)$ désigne l'ensemble des k-jet de difféomorphismes qui envoient x sur y et qui préservent le k-jet de la r-structure géométrique.

Des résultats très importants ont été obtenus par Gromov notamment sur la classe particulière des structures géométriques dites rigides. Une r-structure géométrique est k-rigide si la projection naturelle de $\mathrm{Is}^{k+1}(x,x) \to \mathrm{Is}^k(x,x)$ est injective. Les structures pseudo-riemanniennes et les connexions sont des structures rigides mais une structure symplectique n'est pas une structure géométrique rigide.

Le texte de R. Feres présente notamment le théorème de Gromov de l'orbite dense-ouverte. Comme on en trouve une preuve alternative dans le texte de A. Zeghib, nous y revenons ci-dessous.

Avec les outils et les résultats de R. Zimmer pour étudier la super-rigidité d'un point de vue mesurable et ce théorème, R. Feres nous donne des informations sur les variétés qui peuvent porter des structures géométriques avec de « larges » actions isométriques.

Le résultat principal est ici un théorème de M. Gromov qui nous dit que, si M est une variété analytique réelle fermée qui porte une structure géométrique rigide analytique et unimodulaire et qui admet une action isométrique non triviale d'un groupe de Lie G simple non compact et de centre fini, alors il existe un entier m et une représentation $\rho : \pi_1(M) \to \mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ telle que l'adhérence de Zariski de $\rho(\pi_1(M))$ contienne un groupe G' localement isomorphe à G.

Les conséquences en sont remarquables. Ainsi, par exemple, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ ne peut agir sur S^n en préservant à la fois une forme volume et une connexion analytique.

Abdelghani Zeghib présente dans ce troisième texte, une démonstration plus analytique du résultat suivant :

Une orbite dense du pseudo-groupe d'isométries locales d'une structure pseudo-riemannienne, est ouverte.

L'utilité de ce résultat apparaît par exemple dans notre classification, avec Y. Benoist et F. Labourie, des flots d'Anosov-contact à feuilletages stable et instable C^∞. Un flot d'Anosov-contact préserve une structure pseudo-riemannienne construite à l'aide de sa décomposition d'Anosov et est topologiquement transitif. L'hypothèse sur la régularité des feuilletages stable et instable signifie que la structure est lisse. Nous avons donc au moins une orbite dense d'isométries. Le théorème de Gromov donne immédiatement une structure localement homogène sur un ouvert dense. Ce point de départ a été fondamental.

Comme le fait remarquer l'auteur, une différentiabilité assez élevée est toujours nécessaire pour qu'une orbite dense d'isométries entraîne l'existence d'une orbite ouverte. On dit que deux points x et y sont isométriquement liés s'il existe une isométrie locale envoyant l'un sur l'autre. Il s'agit bien sûr d'une relation d'équivalence. Pour comprendre son graphe dans $M \times M$, l'auteur se sert du fait que les espaces de jets de difféomorphismes ont des structures algébriques et que les équations sur les jets d'isométries locales sont algébriques dans les fibres. Ceci lui permet de bénéficier des propriétés particulières des fonctions partiellement algébriques (*i.e.* polynomiales dans les fibres). Notamment le lemme de la projection dominante : la projection sur la base d'un ensemble partiellement algébrique (*i.e.* l'ensemble des zéros d'une famille de fonctions partiellement algébriques) contient un ouvert dense de son adhérence.

Le fait de savoir si un jet d'isométrie d'ordre assez élevé s'étend en une isométrie locale est un problème d'intégrabilité de champs de plans dans un espace de jets. Il faut donc étudier l'ensemble D des points où une extension est possible. L'approche suivie ici pour traiter cette difficulté consiste à introduire un domaine plus grand d'intégrabilité infinitésimale formelle D^∞, qui est par définition partiellement algébrique, comme d'ailleurs la distribution de champs de plan considérée. La théorie du contrôle avec le théorème d'intégrabilité de R. Hermann pour les distributions involutives et localement de type fini permet de montrer que ces deux domaines coïncident et donc que D est partiellement algébrique.

Le texte traduit la variété des domaines de mathématiques mis à contribution : arithmétique, analyse spectrale, géométrie, systèmes dynamiques. Bien sûr, ce Panorama ne peut prétendre à aucune exhaustivité, mais la grande richesse des pistes de recherches évoquées devrait permettre aux uns de poursuivre dans la voie qu'ils auront choisie et aux autres de satisfaire (un peu) leur curiosité.

Je tiens à remercier tout particulièrement la Société Mathématique de France et l'équipe éditoriale, à qui nous devons d'avoir pu organiser cette session « État de la recherche » et réaliser ce beau volume de *Panoramas & Synthèses*.

Patrick Foulon

Panoramas & Synthèses
13, 2002, p. 1–119

POINTS ENTIERS ET GROUPES DISCRETS : DE L'ANALYSE AUX SYSTÈMES DYNAMIQUES

par

Martine Babillot
suivi d'un appendice par Emmanuel Breuillard

Chaque pas de l'impossible marche
lui ouvrait d'impossibles pas.
S.B. Majrouh
Le voyageur de minuit

***Résumé.* —** Par analogie avec l'exemple des points à coordonnées entières du plan, on appelle dans ce texte points entiers d'une variété l'ensemble des points d'une orbite discrète d'un groupe agissant sur cette variété. On décrit plusieurs méthodes, issues de l'analyse harmonique ou des systèmes dynamiques pour estimer le nombre asymptotique de points entiers dans des boules de grand rayon. On détaille en particulier les travaux de Margulis, Duke, Rudnick, Sarnak, et ceux de Eskin, McMullen, Mozes et Shah concernant le nombre de points entiers sur des variétés algébriques homogènes, ou sur les points entiers entre deux hyperboloïdes irrationnels. On décrit également les travaux de Margulis et de Roblin sur les groupes discrets d'isométries des variétés à courbure négative. Un des outils majeurs, issu des travaux de Ratner, est illustré par une introduction à la théorie ergodique sur les espaces hyperboliques.

***Abstract* (Lattice points and discrete groups : from analysis to dynamical systems)**

In analogy with the fundamental example of integer points in the plane, we call lattice points of a manifold those points which belong to a fixed discrete orbit of a group acting on this manifold. We describe various methods ranging from harmonic analysis to dynamical systems to estimate the asymptotic number of lattice points in large balls. We detail the results of Margulis, Duke, Rudnick, Sarnak, and those of Eskin, McMullen, Mozes and Shah concerning lattice points on algebraic homogeneous subvarieties, or between irrational hyperboloids. We also describe the work by Margulis and Roblin on discrete groups of isometries of negatively curved manifolds. One of the main tools, due to Ratner, is introduced by a section on ergodic theory on hyperbolic spaces.

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 11F72, 11J25, 11P21, 20F67, 20H10, 22E40, 37A17, 37A25, 37A45, 37D40.

***Mots clefs.* —** Points entiers, groupes discrets, flot géodésique et horocyclique, propriété de mélange, formule de prétrace, approximation diophantienne, forme quadratique, espace homogène.