PANORAMAS ET SYNTHÈSES 8

DYNAMIQUE ET GÉOMÉTRIE COMPLEXES

Dominique Cerveau

Étienne Ghys

Nessim Sibony

Jean-Christophe Yoccoz

(avec la collaboration de Marguerite Flexor)

Société Mathématique de France 1999

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Dominique Cerveau
IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France.

Étienne Ghys
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées de l'ENS Lyon, CNRS UMR 5669,
École Normale Supérieure de Lyon, 46 Allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France.
E-mail : `ghys@umpa.ens-lyon.fr`

Nessim Sibony
Université Paris-Sud, CNRS UMR 8628, Bâtiment 425, Mathématiques,
91405 Orsay Cedex, France.
E-mail : `Nessim.Sibony@math.u-psud.fr`

Jean-Christophe Yoccoz
Collège de France, 3 rue d'Ulm, 75005 Paris, France.
Université Paris-Sud, CNRS UMR 8628, Bâtiment 430, Mathématiques,
91405 Orsay Cedex, France.
Marguerite Flexor
Université Paris-Sud, CNRS UMR 8628, Bâtiment 430, Mathématiques,
91405 Orsay Cedex, France.
E-mail : `Marguerite.Flexor@math.u-psud.fr`

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 58F03, 58F15, 58F18, 58F23, 30D05, 30D03, 34A20, 57R30.

Mots clefs. — Dynamique holomorphe, dynamique de dimension 1, équations différentielles ordinaires dans le domaine complexe, feuilletages, singularités de champs de vecteurs.

DYNAMIQUE ET GÉOMÉTRIE COMPLEXES

Dominique Cerveau, Étienne Ghys, Nessim Sibony,
Jean-Christophe Yoccoz
(avec la collaboration de Marguerite Flexor)

Résumé. — Depuis une vingtaine d'années, la théorie des systèmes dynamiques holomorphes a connu un regain d'activité en particulier autour de l'étude fine des ensembles de Julia des polynômes ou fractions rationnelles en une variable complexe. Parallèlement, des théories voisines se sont développées de manière importante pendant la même période ; comme par exemple l'étude qualitative des équations différentielles dans le domaine complexe. La session « État de la recherche » qui s'est tenue à l'ENS de Lyon en janvier 1997 se proposait de faire le point sur ce genre de problèmes, tout en essayant d'insister sur l'unité qui relie ces divers domaines de recherche. Ce volume contient la rédaction des conférences présentées lors de cette session et il est constitué de quatre articles de type « survey ».

L'article de D. Cerveau décrit la structure des équations différentielles polynomiales dans le plan complexe en insistant sur l'analyse locale au voisinage des singularités. Le deuxième article, par É. Ghys, propose un survol de la théorie des laminations par surfaces de Riemann qui interviennent dans de nombreux problèmes de dynamique ou de géométrie. N. Sibony présente l'état actuel de la généralisation de la théorie de Fatou et Julia aux applications polynomiales ou rationnelles en dimension complexe au moins 2. Enfin, la conférence de J.-C. Yoccoz, rédigée par M. Flexor, considère les polynômes de degré 2 en une variable complexe et se consacre en particulier aux propriétés hyperboliques de ces polynômes, autour du théorème de Jakobson. Une introduction générale présente les rudiments de l'histoire des systèmes dynamiques holomorphes dans le but de montrer au lecteur que ces domaines sont très liés et que les interactions sont nombreuses et fécondes.

Dans l'esprit des « États de la recherche de la Société Mathématique de France », les textes qui constituent cet ouvrage ne sont pas destinés aux experts mais aux étudiants ou aux mathématiciens non spécialistes.

***Abstract* (Complex dynamics and geometry). —** In the last twenty years, the theory of holomorphic dynamical systems has had a resurgent activity, in particular concerning the fine analysis of Julia sets associated to polynomials and rational maps in one complex variable. Simultaneously, closely related theories have had a similar rapid development, for instance, the qualitative theory of differential equations in the complex domain.

The meeting "État de la recherche" held in the ENS Lyon in january 1997 aimed at a presentation of the present state of the art in this area, emphasizing the unity linking the various sub-domains. This volume contains four survey articles, corresponding to the lectures presented at the meeting. The paper by D. Cerveau describes the structure of polynomial differential equations in the complex plane focusing on the local analysis around singular points. The second paper, by É. Ghys, is a survey of the theory of laminations by Riemann surfaces which occur in many dynamical or geometrical situations. N. Sibony describes the present state of the generalization of the Fatou-Julia theory for polynomials or rational maps in complex dimension at least 2. Finally, the lecture of J.-C. Yoccoz, written by M. Flexor, considers polynomials of degree 2 in one complex variable and in particular deals with hyperbolic properties of these polynomials centered around the Jakobson theorem. A general introduction gives the rudiments of the history of holomorphic dynamical systems, the aim being to show the reader that these questions are intimately linked and that their interactions are numerous and fruitful.

In the spirit of the meetings "États de la recherche de la Société Mathématique de France", these articles are not written for experts but rather for students or mathematicians working in different fields.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Ce texte est une introduction à la résolution des singularités des feuilletages holomorphes de codimension 1. Après quelques rappels et exemples concernant la désingularisation des courbes et des hypersurfaces, nous énonçons le théorème de réduction des singularités de feuilletages en dimension 2 et 3 avec une description précise des singularités finales. Nous appliquons ensuite cet outil à des problèmes classiques comme le théorème de Frobenius singulier ou la construction d'hypersurfaces invariantes.

La théorie des feuilletages tire en grande partie son origine de l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires dans le domaine complexe. Depuis quelques années, le concept de lamination par surfaces de Riemann semble au cœur de la théorie des systèmes dynamiques holomorphes. Il s'agit de feuilletages généralisés dans le sens où l'espace ambiant n'est pas nécessairement une variété. Les feuilles, quant à elles, sont des surfaces de Riemann typiquement non compactes. Cet article se propose de décrire ce type d'objet, en insistant sur l'analogie avec les surfaces de Riemann compactes. On étudie en particulier le type conforme des feuilles et l'existence de fonctions méromorphes.

On se propose d'exposer les premiers éléments d'une théorie de Fatou-Julia pour les applications rationnelles dans $\mathbb{P}^k$. On considère essentiellement les aspects utilisant la théorie du pluripotentiel.

Étant donnée une application rationnelle dominante $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$, on définit l'ensemble de Julia associé à f. On introduit ensuite un courant T de bidegré $(1,1)$ positif fermé dont les propriétés : invariance, support, régularité, donnent des informations sur la dynamique de f.

Le second chapitre est consacré à l'étude des biholomorphismes polynomiaux réguliers de $\mathbb{C}^k$: points périodiques, entropie, mesure ergodique définie comme intersection de courants, variétés stables, domaines de Fatou-Bieberbach.

Au dernier chapitre on traite du cas des endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^k$. Le support de T coïncide avec l'ensemble de Julia. La mesure $\mu := T^k$ est mélangeante et maximise l'entropie.

Décrire le système dynamique défini par une fonction holomorphe, c'est étudier le comportement des orbites obtenues après itération de cette fonction et décrire comment celles-ci sont distribuées dans le plan. Le cas le plus simple non trivial est le cas des polynômes d'une variable complexe de degré 2 qui est l'objet de ce texte. Cet article comporte trois paragraphes. Le premier est un survol de la théorie élémentaire du plan dynamique d'un polynôme et de l'espace des paramètres de la famille des polynômes quadratiques. Le second paragraphe est consacré aux aspects hyperboliques, autour du théorème de Jakobson. Le troisième paragraphe décrit les aspects quasi-périodiques, liés à des problèmes de petits diviseurs.

ABSTRACTS

The goal of this text is to give an introduction to the resolution of singularities of codimension one holomorphic foliations. After recalling the statements concerning desingularization for curves and hypersurfaces, we state the theorem of reduction of singularities for foliations, including a precise description of terminal singularities. Some applications are given : in particular the Frobenius Theorem and the construction of invariant hypersurfaces.

The theory of foliations has its main roots in the qualitative study of ordinary differential equations in the complex domain. In recent years, the concept of laminations by Riemann surfaces seems to be at the heart of the theory of holomorphic dynamical systems. These laminations are generalized foliations, meaning that the ambiant space is not necessarily a manifold. As for the leaves, they are Riemann surfaces, typically non compact. This paper describes these kinds of objects, emphasizing the analogy with compact Riemann surfaces. We study in particular the conformal type of leaves and the existence of meromorphic functions.

We present the basics of a Fatou-Julia theory for rational maps on $\mathbb{P}^k$. We essentially consider the aspects involving pluripotential theory.

Let $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ be a dominant rational map. After defining the Julia set of f, we introduce a positive closed current T of bidegree $(1,1)$ associated to f.

The properties of T : invariance, support, regularity give informations on the dynamics of f.

Chapter 2 is devoted to the study of regular polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^k$: periodic points, entropy, ergodic measure obtained as an intersection of positive closed currents, stable manifolds, Fatou-Bieberbach domains.

In the last chapter we consider the case of holomorphic endomorphisms of $\mathbb{P}^k$. The support of T coincides with the Julia set and the measure $\mu := T^k$ is mixing and of maximal entropy for f.

The study of the dynamical system associated to a holomorphic function consists of two aspects : behaviour of the orbits under iteration of this function and description of their distribution in the complex plane. The simplest nontrivial case is the case of quadratic polynomials in one complex variable. These form a family, the study of which is the subject of this article. The text is divided in three parts. The first one is a survey of the elementary theory of the dynamical plane of a polynomial and of the parameter space of quadratic polynomials. The second one is devoted to hyperbolic aspects, around Jakobson's Theorem. The third one is a description of quasiperiodic aspects, linked to small divisors problems.

LES SYSTÈMES DYNAMIQUES HOLOMORPHES

Étienne Ghys

Ce volume contient quatre articles traitant de dynamique holomorphe. Dans cette introduction, nous décrivons quelques racines historiques de la théorie. Il ne s'agit cependant pas d'une analyse historique détaillée du développement des systèmes dynamiques holomorphes depuis les origines. Notre seul but est de présenter un point de vue et d'aider le lecteur à comprendre l'unité du sujet.

L'apport du dix-neuvième siècle : la monodromie

> « Après l'invention du Calcul intégral, le problème qui s'imposa aux mathématiciens fut l'intégration des *équations différentielles* (à une ou plusieurs variables indépendantes). Les premiers efforts eurent pour but de représenter l'intégrale à l'aide de fonctions et de symboles élémentaires connus. Quand on eut compris qu'une telle représentation était impossible en général, il fallut bien se résoudre à étudier directement, sur l'équation différentielle elle-même, les propriétés de l'intégrale.
>
> Le développement naturel de cette étude conduisit bientôt les géomètres à embrasser dans leurs recherches les valeurs imaginaires de la variable aussi bien que les valeurs réelles. La théorie de la série de Taylor, celle des fonctions elliptiques, la vaste doctrine de Cauchy firent éclater la fécondité de cette généralisation. Il apparut que, entre deux vérités du domaine réel, le chemin le plus facile et le plus court passe bien souvent par le domaine complexe. »

Ainsi s'exprimait Painlevé, à la fin du dix-neuvième siècle [**8**]. Il avait raison ! Il n'est pas possible ici de faire une analyse précise de l'apport des variables complexes en mathématiques, mais on peut cependant insister sur une découverte fondamentale,

« invisible » d'un point de vue réel, celle du *phénomène de monodromie*, au cœur de la dynamique holomorphe.

L'étude des fonctions algébriques, c'est-à-dire des fonctions « multiformes » $y(x)$ d'une variable x vérifiant une relation polynomiale $P(x,y)=0$, conduisit Riemann à son point de vue génial des « surfaces de Riemann étalées au dessus du plan des x » et sur lesquelles des fonctions algébriques deviennent uniformes. Si l'on considère un point (x_0,y_0), si l'on fait décrire à x un lacet γ issu de x_0 évitant les « points singuliers » et si l'on suit « par continuité » la valeur de $y(x)$, la valeur obtenue par y lorsque x est « revenu » à son point de départ x_0 est en général différente de y_0. Pour chaque chemin, on obtient donc une permutation de l'ensemble des solutions de $P(x_0,y)=0$; c'est un « groupe de monodromie », (fini dans ce cas). Il a fallu beaucoup de temps et de travail pour donner un sens précis à tous ces guillemets...

Du point de vue des équations différentielles, les exemples les plus anodins mènent à des solutions multiformes : les solutions de l'équation différentielle linéaire $xdy=\lambda ydx$ sont $y=\mathrm{const}\cdot x^\lambda$ et ne sont pas des fonctions uniformes de la variable x dès que λ n'est pas entier. Lorsque x fait « un tour » autour du « point singulier » 0, une solution est multipliée par $\exp(2i\pi\lambda)$. Dans ce cas, le « groupe de monodromie », agissant sur l'espace des solutions est le groupe monogène engendré par $\exp(2i\pi\lambda)$, en général infini. Bien sûr, cet exemple est trop élémentaire. Considérons une équation de Riccati :

$$P(x)\frac{dy}{dx}=A(x)+B(x)y+C(x)y^2.$$

Ici, P,A,B,C sont des polynômes en une variable complexe x. Partons d'une condition initiale (x_0,y_0) pour laquelle x_0 n'est pas un point singulier (*i.e.* $P(x_0)\neq 0$). Il existe une solution locale de l'équation, définie dans un voisinage de x_0. Choisissant un chemin γ issu de x_0 et ne rencontrant aucun point singulier, on peut montrer qu'il est possible de prolonger cette solution le long du chemin, comme une solution *méromorphe*. Si γ est un lacet issu de x_0, la valeur y_1 de la solution y lorsque γ revient en x_0 est en général différente de y_0. La transformation qui associe cette nouvelle valeur y_1 à la valeur initiale y_0 est une homographie $y_1=(ay_0+b)/(cy_0+d)$ qui ne dépend que de la classe d'homotopie du lacet γ (évitant les points singuliers). Ceci définit donc un homomorphisme du groupe fondamental du plan complexe privé des points singuliers vers le groupe des homographies agissant sur la sphère de Riemann $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Puisque ce groupe fondamental est un groupe libre non commutatif (dès que P a au moins trois racines), le groupe de monodromie, image de cet homomorphisme, peut être extrêmement compliqué, par exemple dense dans le groupe homographique. Les « solutions » de l'équation de Riccati sont alors « très multiformes », ce qui effrayait beaucoup nos prédécesseurs...

Si l'on considère une équation du type précédent mais où l'on remplace le polynôme $A(x)+B(x)y+C(x)y^2$ par $A(x)+B(x)y+C(x)y^2+D(x)y^3$, il apparaît un nouveau phénomène : lorsqu'on prolonge analytiquement une solution le long d'un chemin γ, on rencontre en général des singularités (de type ramification) en des points qui ne sont pas singuliers pour l'équation. Par exemple, l'équation $-2dy/dx = y^3$ a comme solutions $y = 1/\sqrt{x - \mathrm{const}}$ qui présente une « singularité mobile » au point $x = \mathrm{const}$. Autrement dit, on ne peut même plus définir de groupe de monodromie puisqu'on ne peut plus suivre les valeurs d'une solution le long d'un chemin qui évite les points singuliers de l'équation. Comment analyser les « solutions » d'une telle équation si on ne peut mesurer leur défaut d'uniformité par un groupe ? Lorsque l'on considère des équations non résolues en dy/dx, ou des équations d'ordre supérieur, d'autres phénomènes (encore pires) apparaissent, comme l'existence de points singuliers transcendants mobiles : par exemple $y^2y'' + 2yy'^2 + 1 = 0$ a comme solutions $y = 1/(\mathrm{const} + \ln(x - \mathrm{const}'))$.

La réaction des mathématiciens du dix-neuvième siècle devant cet « excès de monodromie » des solutions des équations différentielles algébriques fut d'essayer de classifier les équations différentielles ayant peu de monodromie, dans l'espoir que ces équations soient suffisamment riches pour produire des « transcendantes nouvelles qui enrichiraient l'analyse ». Le choix était clair : négliger l'étude des équations différentielles « génériques », trop compliquées, pour se consacrer aux rares exemples où la monodromie est contrôlée. Voici quelques exemples. Briot-Bouquet, puis Fuchs et Poincaré cherchent parmi les équations polynomiales de la forme $P(y', y, x) = 0$ celles dont les solutions sont uniformes ou, au pire, ne prennent qu'un nombre fini de valeurs : outre les fonctions algébriques, ils montrent que seules les fonctions elliptiques peuvent vérifier ce critère. Schwarz décrit les équations hypergéométriques dont le groupe de monodromie est *fini*, c'est-à-dire dont les solutions sont des fonctions algébriques. Painlevé étudie dans le même esprit les équations du second ordre dont les solutions sont uniformes : il découvre ainsi ses fameuses « transcendantes de Painlevé ». Pour une étude historique de ces questions, on pourra consulter avec intérêt le livre remarquable de Gray [**3**].

Ainsi, au tournant du siècle, l'immense majorité des équations différentielles restait inexplorée.

Parallèlement à cette riche théorie des équations différentielles dans le domaine complexe, une théorie plus modeste de l'itération des fonctions holomorphes, et tout particulièrement des fractions rationnelles, voyait le jour vers la fin du dix-neuvième siècle. Un livre passionnant de Alexander retrace cette histoire [**1**]. On y apprend notamment que les motivations des précurseurs (comme Schröeder, Koenigs, Leau) étaient bien éloignées des équations différentielles ; l'analogie entre les itérations en temps discrets et continus (comme dans une équation différentielle) ne leur apparaissant pas clairement. L'objet d'étude était plutôt la « théorie des équations fonctionnelles ». Un exemple est l'équation d'Abel : étant donnée une fonction analytique $\phi(z)$, peut-on trouver une autre fonction analytique f telle que $f(\phi(z)) = f(z) + 1$?