

# MATHEMATICAL METHODS AND MODELING FOR MIXTURES OF FLUIDS AND INTERFACE EVOLUTION

Frédéric Charve, Raphaël Danchin & Sylvie Monniaux (eds.)



**Panoramas et Synthèses**

Numéro 61

2024

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

---

*Comité de rédaction*

Samuel BOISSIÈRE	Diego IZQUIERDO
Fabienne CASTELL	Claire LACOUR
Indira CHATTERJI	Quentin MÉRIGOT
Élise GOUJARD	Sergio SIMONELLA
Anne-Sophie de SUZZONI	Todor TSANKOV
Anne MOREAU (dir.)	

*Diffusion*

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
<a href="mailto:christian.smf@cirm-math.fr">christian.smf@cirm-math.fr</a>	<a href="http://www.ams.org">www.ams.org</a>

*Tarifs*

*Vente au numéro* : 42 € (\$ 63)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat*

*Panoramas et Synthèses*  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96  
[panoramas@smf.emath.fr](mailto:panoramas@smf.emath.fr) • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2024

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 1272-3835

ISBN 978-2-85629-987-6

Directeur de la publication : Fabien Durand

---

PANORAMAS ET SYNTHÈSES 61

**MATHEMATICAL METHODS AND MODELING  
FOR MIXTURES OF FLUIDS  
AND INTERFACE EVOLUTION**

**Frédéric Charve, Raphaël Danchin & Sylvie Monniaux  
(eds.)**

Société mathématique de France

*Pascal Auscher*

Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire de  
Mathématiques d'Orsay, 91405 Orsay, France  
*E-mail* : [pascal.auscher@universite-paris-saclay.fr](mailto:pascal.auscher@universite-paris-saclay.fr)

*Sebastian Bechtel*

Delft Institute of Applied Mathematics, Delft  
University of Technology, P.O. Box 5031, 2600  
GA Delft, The Netherlands  
*E-mail* : [s.becht@tu-delft.nl](mailto:s.becht@tu-delft.nl)

*Christiane Bui*

Mathematisches Institut der Heinrich-Heine-  
Universität Düsseldorf, Universitätsstr. 1, 40225  
Düsseldorf, Germany  
*E-mail* : [christiane.bui@uni-duesseldorf.de](mailto:christiane.bui@uni-duesseldorf.de)

*Cosmin Burtea*

Université Paris Cité and Sorbonne Université,  
CNRS, IMJ-PRG, F-75013 Paris, France  
*E-mail* : [cosmin.burtea@imj-prg.fr](mailto:cosmin.burtea@imj-prg.fr)

*Frédéric Charve*

Université Paris-est, LAMA UMR 8050, 61, av-  
enue du Général de Gaulle, 94010 Créteil Cedex,  
France  
*E-mail* : [frederic.charve@u-pec.fr](mailto:frederic.charve@u-pec.fr)

*Raphaël Danchin*

Université Paris-est, LAMA UMR 8050, 61, av-  
enue du Général de Gaulle, 94010 Créteil Cedex,  
France  
*E-mail* : [danchin@u-pec.fr](mailto:danchin@u-pec.fr)

*Sergey Gavriluk*

Aix-Marseille Université and IUSTI, UMR CNRS  
7343, Marseille, France  
*E-mail* : [sergey.gavrilyuk@univ-amu.fr](mailto:sergey.gavrilyuk@univ-amu.fr)

*Peer Kunstmann*

Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Insti-  
tut für Analysis, Englerstr. 2, 76131 Karlsruhe,  
Germany

*E-mail* : [peer.kunstmann@kit.edu](mailto:peer.kunstmann@kit.edu)

*Sylvie Monniaux*

Institut de Mathématiques de Marseille, UMR  
7373, 13453 Marseille, France  
*E-mail* : [sylvie.monniaux@univ-amu.fr](mailto:sylvie.monniaux@univ-amu.fr)

*Charlotte Perrin*

Aix Marseille Univ, CNRS, I2M, Marseille,  
France; Institut de Math. de Marseille (I2M)  
UMR 7373 Site de Saint Charles, 3 place Victor  
Hugo, Case 19, 13331 Marseille cedex 3  
*E-mail* : [charlotte.perrin@cnrs.fr](mailto:charlotte.perrin@cnrs.fr)

*Ioann Vasilyev*

Laboratoire Analyse, Géométrie et Modélisation,  
CY Cergy Paris Université, 2 avenue Adolphe  
Chauvin, 95300, Pontoise, France  
[ioann.vasilyev@cyu.fr](mailto:ioann.vasilyev@cyu.fr)

on leave from:

St. Petersburg Department of Steklov Mathe-  
matical Institute Russian Academy of Sciences  
(PDMI RAS), Russia  
[milavas@mail.ru](mailto:milavas@mail.ru)

---

*Classification mathématique par sujets.* (2010) — 47-01, 76-02, 76-10, 76D03, 76D05, 76T10, 35Q30, 76M30.

*Keywords and phrases.* — Fluid mechanics, modeling, bi-fluids, Navier-Stokes, tent spaces, maximal regularity, Hamilton's principle of stationary action.

*Mots-clés et phrases.* — Mécanique des fluides, modélisation, bi-fluides, Navier-Stokes, espaces de tentes, régularité maximale, principe de moindre action.

---

# MATHEMATICAL METHODS AND MODELING FOR MIXTURES OF FLUIDS AND INTERFACE EVOLUTION

Frédéric Charve, Raphaël Danchin & Sylvie Monniaux (eds.)

**Abstract.** — This volume includes the lecture notes of the three mini-courses that have been given during the CIRM-SMF week entitled *Inhomogeneous Flows: Asymptotic Models and Interfaces Evolution* that took place at the CIRM from September 23 to September 27, 2019. The conference followed the themes of the ANR-15-CE40-0011 INFAMIE project and aimed at bringing together experts coming from various branches of mathematical fluid dynamics and interested in inhomogeneous fluids where problems of interfaces occur. Beside the mini-courses, the event comprised 14 plenary talks that were specifically dedicated to inhomogeneous flows.

The mini-courses emphasized on the one hand theoretical approaches that proved to be efficient in the study of evolutionary fluid mechanics (maximal regularity issues in the notes of P. Kunstmann with stress on the  $L^1$ -in-time estimates that turn out to be crucial in the study of free boundary problems, and the prospective course by P. Auscher on tent spaces), and on the other hand the modeling aspect with the lectures by S. Gavrilyuk devoted to the derivation of models of bi-fluids by means of Hamiltonian principle.

The originality of these texts is that they have been written conjointly by the speaker and young participants, from the notes that have been taken during the courses.

**Résumé. (Méthodes mathématiques et modélisation pour les mélanges de fluides et les interfaces)** — Ce volume contient les textes des trois mini-cours qui ont été donnés au CIRM du 23 au 27 septembre 2019, lors de la semaine CIRM-SMF intitulée *Fluides inhomogènes : modèles asymptotiques et évolution d'interfaces*. La conférence suivait les thèmes du projet ANR-15-CE40-0011 INFAMIE et visait à réunir des experts intéressés par l'analyse mathématique et la modélisation des fluides non homogènes et des interfaces. En plus des mini-cours, la conférence comprenait 14 exposés qui étaient spécifiquement dédiés aux écoulements non homogènes.

Les mini-cours ont mis l'accent d'une part sur des approches théoriques qui se sont avérées efficaces dans l'étude de la mécanique des fluides (théorie de la régularité maximale dans les exposés de P. Kunstmann avec, notamment les estimations  $L^1$  en temps qui sont cruciales dans l'étude des problèmes à frontières libres, et le cours

un peu plus prospectif de P. Auscher sur les espaces de tentes), et d'autre part sur l'aspect modélisation avec les conférences de S. Gavriluk consacrées à la dérivation de modèles de bi-fluides par des arguments empruntés à la mécanique hamiltonienne.

Ces textes ont été écrits conjointement par le conférencier et des jeunes participants, à partir des notes prises pendant les cours.

## TABLE OF CONTENTS

<b>Résumés des articles</b> .....	ix
<b>Abstracts</b> .....	xi
<b>FRÉDÉRIC CHARVE &amp; RAPHAËL DANCHIN &amp; SYLVIE MONNIAUX — <i>Introduction</i></b> .....	xiii
1. Tent spaces and the incompressible Navier-Stokes equations .....	xv
2. Around maximal regularity for Navier-Stokes equations .....	xix
3. Hamilton’s principle of stationary action in multiphase flow modeling . . .	xxii
References .....	xxv
<b>PASCAL AUSCHER &amp; IOANN VASILYEV — <i>On the use of tent spaces for solving PDEs: A proof of the Koch-Tataru theorem</i></b> .....	1
1. Introduction .....	2
2. Proof of the Koch and Tataru theorem via tent spaces .....	7
References .....	26
<b>SEBASTIAN BECHTEL, CHRISTIANE BUI &amp; PEER KUNSTMANN — <i>Around maximal regularity for Navier-Stokes equations</i></b> .....	29
1. Introduction .....	29
2. Some basics on maximal $L^p$ -regularity .....	30
3. Real interpolation .....	46
4. Applications to abstract Cauchy problems .....	51
5. Maximal $L^p$ -regularity for $p \in (1, \infty)$ .....	55
6. Applications to Navier-Stokes equations .....	58
Historical Note on Section 6 .....	66
Appendix .....	67
References .....	73

COSMIN BURTEA & SERGEY GAVRILYUK & CHARLOTTE PERRIN — <i>Hamilton's principle of stationary action in multiphase flow modeling</i> . . . . .		77
1. Introduction . . . . .		78
2. The classical formulation of the principle of stationary action . . . . .		81
3. Hamilton's principle for continuous deformable media . . . . .		85
4. Recovering the Euler equations for one-phase flows . . . . .		94
5. Dynamics of two-phase flows . . . . .		97
Conclusion . . . . .		103
References . . . . .		103



## RÉSUMÉS DES ARTICLES

### *Introduction*

FRÉDÉRIC CHARVE & RAPHAËL DANCHIN & SYLVIE MONNIAUX . . . . . xiii

Ce volume contient les textes des trois mini-cours qui ont été donnés au CIRM du 23 au 27 septembre 2019, lors de la semaine CIRM-SMF intitulée *Fluides inhomogènes : modèles asymptotiques et évolution d'interfaces*. La conférence suivait les thèmes du projet ANR-15-CE40-0011 INFAMIE et visait à réunir des experts intéressés par l'analyse mathématique et la modélisation des fluides non homogènes et des interfaces. En plus des mini-cours, la conférence comprenait 14 exposés qui étaient spécifiquement dédiés aux écoulements non homogènes.

Les mini-cours ont mis l'accent d'une part sur des approches théoriques qui se sont avérées efficaces dans l'étude de la mécanique des fluides (théorie de la régularité maximale dans les exposés de P. Kunstmann avec, notamment les estimations  $L^1$  en temps qui sont cruciales dans l'étude des problèmes à frontières libres, et le cours un peu plus prospectif de P. Auscher sur les espaces de tentes), et d'autre part sur l'aspect modélisation avec les conférences de S. Gavrilyuk consacrées à la dérivation de modèles de bi-fluides par des arguments empruntés à la mécanique hamiltonienne.

Ces textes ont été écrits conjointement par le conférencier et des jeunes participants, à partir des notes prises pendant les cours.

### *Espaces de tentes pour les équations aux dérivées partielles et théorème de Koch et Tataru*

PASCAL AUSCHER & IOANN VASILYEV . . . . . 1

Nous présentons (une partie) de la théorie des espaces de tentes paraboliques et l'appliquons à la résolution d'EDP issues de la mécanique des fluides. Ici, nous nous concentrons sur les équations de Navier-Stokes incompressibles homogènes qui ont été étudiées mathématiquement depuis près d'un siècle. Pourtant, les questions de l'existence, unicité et régularité des solutions n'ont pas encore été résolues de façon complètement satisfaisante.

Une grande partie des résultats disponibles sur les équations de Navier-Stokes sont ceux pour lesquels la donnée initiale  $u_0$  est de norme petite dans un espace

fonctionnel *critique*, c'est-à-dire invariant d'échelle. Tous ces espaces sont inclus dans l'espace de Besov homogène  $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}$ . Une avancée importante a été faite dans l'article [15] de Koch et Tataru, où les auteurs démontrent l'existence et l'unicité de solutions du système de Navier-Stokes dans le cas où la norme de  $u_0$  dans  $BMO^{-1}$  est suffisamment petite. Le but principal de ces notes est de présenter une nouvelle démonstration de ce résultat, reposant sur la théorie des espaces de tentes. Si la démonstration proposée n'est pas plus simple que celle de Koch et Tataru, nous espérons convaincre le lecteur de l'utilité des espaces de tentes pour étudier d'autres équations de la mécanique des fluides.

Ces notes s'appuient principalement sur l'article [1] de P. Auscher et D. Frey qui considère un système légèrement plus général d'équations paraboliques de type Navier-Stokes. Nous avons choisi ici de traiter uniquement les équations de Navier-Stokes homogènes incompressibles classiques afin de pouvoir proposer un texte auto-contenu.

*Autour de la régularité maximale pour les équations de Navier-Stokes*

SEBASTIAN BECHTEL, CHRISTIANE BUI & PEER KUNSTMANN . . . . . 29

Dans ce texte, nous introduisons la notion de  $L^p$ -régularité maximale, et l'appliquons aux équations de Navier-Stokes. Nous commençons par rappeler des définitions de base sur les semi-groupes analytiques et l'interpolation réelle. Nous passons en revue quelques résultats abstraits et abordons la question de savoir comment obtenir la régularité  $L^p$ -maximale. Ces résultats abstraits sont ensuite appliqués à l'opérateur de Stokes et aux équations de Navier-Stokes dans  $\mathbb{R}^d$  et dans des domaines.

*Une modélisation des écoulements multiphasiques basée sur le principe de moindre action de Hamilton*

COSMIN BURTEA & SERGEY L. GAVRILYUK & CHARLOTTE PERRIN . . . . . 79

Ces notes de cours concernent l'obtention d'équations modélisant la dynamique des fluides au moyen du principe de moindre action d'Hamilton.

Nous rappelons les principaux outils conceptuels associés à ce principe variationnel qui, à l'origine, a été développé dans le cadre de la mécanique classique en dimension finie, et nous décrivons comment ces outils peuvent être adaptés au cas de la mécanique des milieux continus.

Les équations d'Euler modélisant la dynamique d'un fluide parfait sont obtenues comme un premier exemple d'application.

Le cœur de ces notes concerne l'obtention de modèles multiphasiques grâce au principe d'Hamilton. Nous présentons un nouveau point de vue lagrangien sur cette question.