RANDOM SCHRÖDINGER OPERATORS

Margherita Disertori, Werner Kirsch,
Abel Klein, Frédéric Klopp,
Vincent Rivasseau

Panoramas et Synthèses

Numéro 25

2008

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

EDP Sciences
17, avenue du Hoggar
91944 les Ulis cedex A
France
www.edpsciences.com

Tarifs 2008

Vente au numéro : 48 € ($ 72)
Abonnement Europe : 53 €, hors Europe : 62 € ($ 93)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Panoramas et Synthèses
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 1272-3835

ISBN 978-2-85629-254-9

Directeur de la publication : Stéphane JAFFARD

PANORAMAS ET SYNTHÈSES 25

RANDOM SCHRÖDINGER OPERATORS

Margherita Disertori
Werner Kirsch
Abel Klein
Frédéric Klopp
Vincent Rivasseau

Société mathématique de France 2008
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Margherita Disertori
Theoretische Physik, ETH Zürich, 8093 Zürich, Switzerland

Werner Kirsch
Fakultät für Mathematik und Informatik, FernUniversität Hagen
58084 Hagen, Germany
E-mail : werner.kirsch@fernuni-hagen.de

Abel Klein
University of California, Irvine, Department of Mathematics
Irvine, CA 92697-3875, USA
E-mail : aklein@uci.edu

Frédéric Klopp
LAGA, UMR 7539 CNRS, Institut Galilée, Université Paris-Nord
99 Avenue J.-B. Clément
93430 Villetaneuse, France
E-mail : klopp@math.univ-paris13.fr

Vincent Rivasseau
Laboratoire de Physique Théorique, Bâtiment 210, Université Paris XI
91405 Orsay Cedex, France

2000 *Mathematics Subject Classification.* — 82B44, 35J10, 47B80, 60H25, 81Q10.

Key words and phrases. — Schrödinger operators, random operators, localization.

Mots-clé et phrases. — Opérateurs de Schrödinger, opérateurs aléatoires, localisation.

RANDOM SCHRÖDINGER OPERATORS

Margherita Disertori, Werner Kirsch, Abel Klein, Frédéric Klopp, Vincent Rivasseau

Astract. — During the last thirty years, random Schrödinger operators that draw originated in condensed matter physics, have been studied intensively and very productively. The theory is at the crossroads of a number of mathematical fields, the theory of operators, partial differential equations, the theory of probabilities, in particular the study of stochastic processes and that of random walks and Brownian motion in a random environment. This monograph aims at giving the reader a panorama going from the now classic foundations to very recent developments.

Résumé **(Opérateurs de Schrödinger aléatoires)**

Pendant les trente dernières années, les opérateurs de Schrödinger aléatoires, qui trouvent leur origine dans la physique de la matière condensée, ont été l'objet d'une activité intense et productive. La théorie est à la croisée des chemins de plusieurs domaines des mathématiques, la théorie des opérateurs, les équations aux dérivées partielles, la théorie de probabilité, en particulier, l'étude des processus stochastiques et l'étude des marches aléatoires et mouvement brownien dans un milieu aléatoire. Ce volume en présente un panorama allant des fondements maintenant classiques jusqu'à des développements très récents.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Ces notes essayent de présenter les bases de la théorie des opérateurs de Schrödinger aléatoires. Elles sont destinées à un public très large et ne requièrent que des connaissances minimales en analyse fonctionnelle et en théorie des probabilités. Néanmoins, on y donne une démonstration complète des asymptotiques de Lifshitz et de la localisation d'Anderson. Ces notes ont été augmentées d'un appendice écrit par F. Klopp, appendice présentant une preuve de la localisation d'Anderson suivant les idées d'Aizenman et Molchanov.

Cet article est consacré à l'analyse multi-échelle et à la localisation pour des opérateurs aléatoires. Cette analyse y est développée non seulement pour les opérateurs de Schrödinger mais aussi pour des modèles acoustiques ou de Maxwell. C'est l'un des principaux outils menant à des résultats sur la localisation pour ces opérateurs.

Ces dernières années, les techniques de champ constructives et la méthode du groupe de renormalisation autour des singularités étendues ont été appliquées au régime à faible couplage du modèle d'Anderson. Cela a permis de clarifier la relation entre ce modèle et la théorie des matrices aléatoires. Nous décrivons cette situation et le programme actuel pour analyser en détail la densité d'états et les fonctions de Green de ce modèle, en utilisant le formalisme supersymétrique.

ABSTRACTS

An invitation to random Schrödinger operators
WERNER KIRSCH WITH AN APPENDIX BY FRÉDÉRIC KLOPP 1

These lecture notes try to give some of the basics of random Schrödinger operators. They are meant for nonspecialists and require only minor previous knowledge about functional analysis and probability theory. Nevertheless this survey includes complete proofs of Lifshitz tails and Anderson localization. An appendix written by F. Klopp is devoted to the Aizenman-Molchanov proof of Anderson localization.

Multiscale Analysis and Localization of random operators
ABEL KLEIN 121

This paper is devoted to the method of multiscale analysis in the study of localization of random operators. The method is developed not only for Schrödinger operators, but also for acoustic, Maxwell or elastic operators. It is one of the basic techniques to obtain results on the localized regimes for continuous random operators.

Random Matrices and the Anderson Model
MARGHERITA DISERTORI & VINCENT RIVASSEAU 161

In recent years, constructive field techniques and the method of renormalization group around extended singularities have been applied to the weak coupling regime of the Anderson Model. It has allowed to clarify the relationship between this model and the theory of random matrices. We review this situation and the current program to analyze in detail the density of states and Green's functions of this model using the supersymmetric formalism.

INTRODUCTION

In the present volume, we want to give an overview of the theory of random Schrödinger operators and of the various methods that have been developed to study them. We do not aim at exhaustivity but try to cover, at least through simple examples, most of the techniques used to study random Schrödinger operators. The theory of random Schrödinger operators originates in condensed matter physics, particularly, in the works of P. Anderson, I. Lifshitz and N. Mott. The mathematical life of random Schrödinger operators began in the 60's and did not stop growing and intensifying since then. The theory is at the crossroads of a number of mathematical fields: the theory of operators, partial differential equations, the theory of probabilities, in particular the study of stochastic processes, and that of random walks and Brownian motion in a random environment.

The volume consists in three parts. The first part is an introduction to all the main concepts of the theory in a very simple technical framework. The next two parts are focusing on more specialized topics and are technically more involved.

The first part authored by W. Kirsch is an introductory course to random Schrödinger, more specially to discrete random Schrödinger operators. This comprehensive course for beginners covers the mathematical theory in most of its aspects. Starting with very basic facts requiring no other knowledge than standard functional analysis and some knowledge of probability theory, it gets the readers through the theory and brings them to a complete proof of localization via multiscale analysis. Among the topics covered are the ergodicity of the considered model, its consequences, their properties, in particular regularity and the asymptotic behaviour of the density of integrated states, as well as different notions of localization.

In a short appendix, in a very simple setting, we describe a set of ideas first introduced by M. Aizenman and S. Molchanov to give a different point of view and proof of localization. This set of ideas has also proved to be very successful.

The second part was written by A. Klein and details a multiscale analysis scheme developed for continuous random operators. The method is developed not only for Schrödinger operators, but also for acoustic, Maxwell or elastic operators. This method is also the basic tool to obtain the most precise and impressive results on the localized regimes for continuous random operators.

The third part, due to M. Disertori and V. Rivasseau describes a quantum field theoretical approach to the study of random Schrödinger operators. While the approach to the subject described in the first two parts is essentially operator theoretic and functional analytic in nature, this approach is field theoretic and relies on a representation of the spectral quantities, in particular, the Green's function, in terms of super-integrals. Another major difference is that the focus is not on the localized regime but on energies supposed to be in the delocalized regime. This is done by building a bridge between random Schrödinger operators and some special classes of random matrices.

To complete this short presentation, let me mention that this volume originates in lectures given at a summer school entitled "Opérateurs de Schrödinger aléatoires: méthodes, résultats et perspectives" organized in the framework of the "États de la Recherche" at the University Paris 13 in June 2002. I also want to thank all those who contributed to the existence of this volume, the authors, clearly, but also, the editors of the series "Panoramas et Synthèses", in particular, B. Helffer and P. Biane, and finally, the people and institutions that helped, sponsored and supported the organization of the États de la Recherche where this work originated, the members of the ACI "Méthodes mathématiques en physique de la matière condensée", in particular M. Abdesselam, the LAGA UMR 7539, the University Paris 13, the French Ministry of Research, the CNRS, the GDRE MPQ and the French mathematical society.

Frédéric Klopp

INTRODUCTION

L'objectif de ce volume est de donner un panorama de la théorie des opérateurs de Schrödinger aléatoires et des méthodes qui ont été développées pour leur étude. Nous n'avons pas de prétention à l'exhaustivité mais avons néanmoins tenté de présenter, au moins dans des exemples simples, la plupart des techniques connues pour traiter ces modèles. L'étude des opérateurs de Schrödinger aléatoires trouve son origine dans la physique de la matière condensée, en particulier, dans les travaux de P. Anderson, I. Lifshitz et N. Mott. L'étude mathématiques de ces modèles a débuté à la fin des années 60 et n'a cessé de s'intensifier depuis. La théorie des opérateurs de Schrödinger aléatoires est à la croisée des chemins de plusieurs domaines des mathématiques, la théorie des opérateurs, les équations aux dérivées partielles, la théorie des probabilités, en particulier, l'étude des processus stochastiques et l'étude des marches aléatoires et mouvement brownien dans un milieu aléatoire.

Le volume comporte trois parties. La première partie est une introduction aux concepts de bases de la théorie dans un cadre simple ; elle est destinée à ceux voulant apprendre les fondements de la théorie. Les deux partie suivantes se focalisent sur des techniques particulières et sont plus exigeantes.

La première partie, écrite par W. Kirsch, est un cours d'introduction aux opérateurs de Schrödinger aléatoires. Pour l'essentiel, on n'y considère que les opérateurs discrets ce qui permet d'en simplifier l'aspect technique tout en conservant la richesse des phénomènes étudiés. Ce cours complet couvre la théorie dans la plupart de ses aspects. Démarrant à un niveau très accessible ne requérant que quelques bases d'analyse fonctionnelle et de théorie des probabilités, il mène le lecteur jusqu'à une démonstration complète de la localisation pour des opérateurs discrets, démonstration obtenue au moyen d'une analyse multi-échelle. Parmi les thèmes abordés, on trouvera l'ergodicité des modèles considérés et ses conséquences, les propriétés, en particulier la régularité et le comportement asymptotique de la densité d'états intégrée, différentes notions de localisation.

À cette partie a été ajouté un court appendice qui a pour but, dans un cadre très simple, de présenter les idées d'abord développées par M. Aizenman et S. Molchanov. Ce cercle d'idées donne une autre approche de la localisation et s'est révélé très fructueux pour certaines classes d'opérateurs discrets et continus.