Revue d'Histoire des Mathématiques

Calcul symbolique et calcul intégral de Lagrange à Cauchy

Jean-Pierre Lubet

Tome 16 Fascicule 1 2010

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Ministère de la culture et de la communication (DGLFLF) et du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Secrétariat :

Nathalie Christiaën
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96
Mél : revues@smf.ens.fr / URL : http//smf.emath.fr/

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs 2010 : prix public Europe : 66 €; prix public hors Europe : 75 €;
prix au numéro : 38 €.
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
AMS, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940 USA

 Maquette couverture : Armelle Stosskopf

Revue d'histoire des mathématiques
16 (2010), p. 63–131

CALCUL SYMBOLIQUE ET CALCUL INTÉGRAL DE LAGRANGE À CAUCHY

Jean-Pierre Lubet

Résumé. — Dans un mémoire publié en 1774, Lagrange utilise des méthodes reposant sur l'analogie des puissances positives et des différences, et des puissances négatives et des sommes, qui lui permettent, notamment, d'obtenir diverses formules d'intégration. D'autres auteurs s'engagent alors dans cette voie. Les problèmes de calcul intégral jouent un rôle important dans le développement de diverses formes de calcul symbolique et celui-ci fait la preuve de son efficacité dans ce domaine : il permet de généraliser ou de retrouver rapidement des résultats anciens, introduit de la clarté dans des pratiques d'intégration numérique, unifie les procédures d'intégration des divers types d'équations linéaires, et conduit à la résolution de nouvelles équations aux dérivées partielles. Cependant, les notations et les fondements mêmes des nouveaux procédés restent longtemps l'objet d'interrogations. Dans les années 1820, Cauchy apporte une réponse conforme à sa conception de la rigueur : en utilisant la formule intégrale de Fourier, il donne aux symboles d'opération une signification précise, et il traite par ce moyen les divers types d'équations linéaires à coefficients constants.

Texte reçu le 1er février 2005, révisé le 4 septembre 2009, accepté le 27 novembre 2009.

J.-P. Lubet, 7 allée du Tardenois, 59650 Villeneuve d'Ascq, France.
Courrier électronique : jplubet@club-internet.fr

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A50, 01A55, 34–03, 35–03, 39–03, 47–03.

Mots clefs : Calcul symbolique, calcul intégral, équations différentielles linéaires, analogie, Lagrange, Laplace, Lorgna, Prony, Bürmann, Lacroix, Arbogast, Français, Servois, Herschel, Babbage, Fourier, Poisson, Cauchy.

Key words and phrases. — Symbolic calculus, integral calculus, linear differential equations, analogy, Lagrange, Laplace, Lorgna, Prony, Bürmann, Lacroix, Arbogast, Français, Servois, Herschel, Babbage, Fourier, Poisson, Cauchy.

Abstract (Symbolic calculus and integral calculus, from Lagrange to Cauchy)
In a paper published in the year 1774, Lagrange used methods which were based on the analogy of positive powers and differences, and negative powers and integrals, which enabled him to obtain various formulae of integration. Then other authors entered into this way. Problems of integral calculus played an important part in the development of various methods of symbolical calculus and this one proved his efficiency in this matter: it made it possible to generalize or to quickly re-find former results, it introduced clarity into practices of numerical integration, it unified procedures of integration of different types of linear equations, it led to the solving of new partial differential equations. However the notations and the foundations themselves of the new processes remained for a long time subjects of interrogations. In the 1820s, Cauchy provided an answer in accordance with his conception of rigour: by using Fourier's integral formula, he gave the symbols of operation a precise meaning, and thus he dealt with the different types of linear equations with constant coefficients.

INTRODUCTION

En 1695, à l'occasion d'échanges avec Jean Bernoulli, Leibniz introduit la notation exponentielle d^n pour désigner les différentielles d'ordres successifs, et il traduit la réciprocité de l'intégration et de la différentiation par les notations $d^{-1} = \int$ et $d^{-n} = \int^n$. Leibniz et Jean Bernoulli utilisent ce nouveau point de vue pour retrouver la formule de développement en série de l'intégrale $\int y\, dx$ (dite formule de Bernoulli), que les deux mathématiciens avaient d'abord établie par d'autres moyens. La voie semble alors ouverte vers un calcul sur les symboles d'opérations, analogue à celui qui affecte habituellement les quantités. Mais il faut attendre 1774 et la publication par Lagrange de son mémoire « Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables » pour trouver une utilisation systématique de cette analogie entre les puissances positives et les différences, et les puissances négatives et les intégrales. Des travaux sur ce que l'on appelle souvent le calcul symbolique (ou calcul des opérations) vont alors s'ensuivre à la fin du XVIII^e^ et au début du XIX^e^ siècle, en liaison avec le développement du calcul différentiel et intégral et les recherches sur ses fondements.

De nombreuses études ont été consacrées à l'histoire du calcul symbolique dans cette période ; on peut citer, notamment, L. Novy [1968], E. Koppelman [1971], L.A. Lusternik et S. Petrova [1972], S. Petrova [1993],

M. Panza [1992], J.-P. Friedelmeyer [1994], M.-J. Durand-Richard [1985; 1998], P. Allaire et R. Bradley [2002]. L'attention des historiens s'est particulièrement concentrée sur deux aspects de cette histoire : ses rapports avec les recherches sur les fondements du calcul différentiel ; son rôle dans le développement d'une algèbre abstraite au XIXᵉ siècle. Même s'il a été abordé par certains auteurs (notamment Koppelman et Petrova), un aspect semble cependant mériter d'être développé davantage : les interactions entre calcul intégral et calcul symbolique. Si le calcul intégral va apparaître à partir du milieu du XIXᵉ siècle comme l'un des domaines privilégiés d'application de l'algèbre symbolique, il a aussi été, dès le XVIIIᵉ siècle l'un des moteurs du développement de cette algèbre. Nous nous proposons donc de traiter ce thème de manière systématique sur l'ensemble de la période allant de Lagrange à Cauchy, en prenant en compte la diversité des savants impliqués, dont plusieurs restent encore peu connus.

1. LAGRANGE ET LA « NOUVELLE ESPÈCE DE CALCUL »

On sait que dans son mémoire *Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables*, publié en 1774, Lagrange considère que, pour toute fonction u, on peut écrire le développement en série entière suivant

$$u(x+\xi) = u + u'\xi + \frac{u''\xi^2}{2} + \frac{u'''\xi^3}{2\cdot 3} + \frac{u^{(4)}\xi^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots, \tag{1.1}$$

où ξ est un accroissement quelconque de la variable x et où les symboles $u', u'', u''', \ldots$ désignent des fonctions de x seulement. Ces fonctions dérivent les unes des autres comme u' dérive de u : c'est-à-dire que u'' est aussi le coefficient de ξ dans le développement de $u'(x+\xi)$, u''' est le coefficient de ξ dans le développement de $u''(x+\xi)$, etc. Le calcul différentiel est alors défini comme le passage de la fonction u à ses dérivées successives, le calcul intégral étant à l'inverse le passage des dérivées aux fonctions primitives. Lagrange affirme que sa conception des calculs différentiel et intégral est ainsi « indépendante de toute métaphysique et de toute théorie des quantités infiniment petites ou évanouissantes » [Lagrange 1774, p. 443]. En recourant à des valeurs de ξ infiniment petites, les fonctions $u', u'', u''', \ldots$ peuvent s'interpréter comme des quotients différentiels, et