Revue d'histoire des mathématiques,
2 (1996), p. 265–307.

GENÈSE DES PREMIERS ESPACES VECTORIELS DE FONCTIONS

Jean-Luc Dorier (*)

Résumé. — Cet article examine comment la notion d'espace vectoriel de fonctions s'est peu à peu imposée dans l'analyse entre 1880 et 1930 environ. Malgré certaines approches formelles précoces, les questions linéaires en dimension infinie sont longtemps restées marquées par l'analogie avec la dimension finie, que l'on traitait alors à l'aide des déterminants. Nous regardons comment l'étude de l'équation de Fredholm d'une part, en particulier le travail de Hilbert, et l'émergence de notions topologiques d'autre part, ont fait apparaître, par des généralisations successives, la nécessité d'une approche axiomatique.

Abstract. — The inception of the first vector spaces of functions. The paper surveys the gradual rise and initial adoption in the field of analysis of the concept of vector spaces of functions, in the period from ca. 1880 to ca. 1930. Some early formalistic approaches notwithstanding, the treatment of linear problems for an infinite number of dimensions long bore the mark of the analogy with finite-number of dimensions situations, this at the time involving the use of determinants. The paper examines how the Fredholm equation, on the one hand, and particularly Hilbert's contribution on the matter, and the emergence of topological concepts on the other hand, came to show, through a succession of generalisations, the requirement for an axiomatic approach.

Dans la deuxième moitié du XIXe siècle, sans que le concept d'espace vectoriel ne soit encore dégagé, se consolide un corpus théorique autour des questions de linéarité. Ce corpus est issu de divers horizons : calcul vectoriel et géométrie, étude des systèmes d'équations numériques et différentielles linéaires, formes bilinéaires et quadratiques, etc. L'outil central en est le déterminant, qui, depuis sa popularisation en 1750 avec les

(*) Texte reçu le 16 octobre 1995, révisé le 25 juin 1996.
Jean-Luc Dorier, Équipe de didactique des mathématiques, Laboratoire Leibniz, UMR 5522 CNRS-UJF-INPG, IMAG, Université Joseph Fourier, 46 av. F. Viallet, 36031 Grenoble Cedex (France). Courrier électronique : jldorier@grenet.fr.

(Sauf mention d'une traduction française dans la bibliographie, les citations dans le texte, ont été traduites par l'auteur. Dans les références, les pages sont toujours données d'après la publication des œuvres lorsqu'elle existe.)

travaux de Cramer, n'a cessé d'être à la base de toutes les questions de linéarité. À la fin du XIX^e siècle, plusieurs faits distincts conduisent à un changement qui arrive à son terme vers 1930. Tout d'abord, à l'intérieur même du corpus, les objets et les outils deviennent plus sophistiqués et s'affranchissent peu à peu de la théorie des déterminants (par exemple, pour les travaux de Frobenius sur le rang, voir [Dorier 1993]) permettant ainsi de mieux dégager les contours du concept d'espace $\mathbb{R}^n$. Parallèlement, des approches formelles et même axiomatiques apparaissent, dégageant la notion d'espace vectoriel formel, caractérisé par sa structure linéaire. Ces premières tentatives restent cependant isolées et sans grand écho. Enfin, de plus en plus de problèmes d'analyse conduisent à étudier la linéarité en dimension infinie.

Pour un mathématicien contemporain, une fonction, en tant qu'élément d'un espace vectoriel, est le prototype du vecteur qui ne se laisse pas réduire à ses coordonnées. C'est pourquoi, à la lecture du bref bilan que nous venons de dresser, on pourrait croire qu'à la fin du XIX^e siècle, sont réunis tous les ingrédients pour imposer l'approche formelle de la notion d'espace vectoriel, et qu'il existe, dans l'histoire de l'algèbre linéaire, une rupture conceptuelle où l'apparition de la dimension infinie est intrinsèquement liée à l'adoption de l'approche axiomatique. Mais ceci est en grande partie faux. En effet, malgré les travaux de certains mathématiciens, tels que Lebesgue et Baire, par exemple, la représentation d'une fonction par un développement en série est encore au début du XX^e siècle la conception dominante dans beaucoup de domaines de l'analyse. Or, une série est, avant tout, une suite infinie de coefficients, ce qui correspond au cas limite de la représentation en coordonnées. Ainsi, la rupture attendue entre dimension finie et dimension infinie n'a pas eu lieu (et ce, même pour des espaces fonctionnels qui sont de dimension non dénombrable, comme les espaces de Hilbert).

De fait, nous allons voir que les premiers travaux en dimension infinie se sont fondés sur une analogie avec la dimension finie et n'ont fait que généraliser le corpus établi dans ce cadre, même si l'évolution des recherches a permis de construire des méthodes et des outils plus sophistiqués. Par ailleurs, la nature topologique des problèmes a permis d'introduire un point de vue géométrique dans les ensembles de fonctions, *via* une distance ou un produit scalaire. Ainsi retrouve-t-on dans le cadre de la dimension infinie, les mêmes débats qu'en géométrie entre méthodes synthétique et analytique. Dans un premier temps, les travaux les plus marquants ne tentent pas de mettre en place une approche formelle de type synthétique. La plupart sont consacrés à résoudre des problèmes précis, élaborant des méthodes dans un cadre descriptif très peu formel, où apparaissent cependant ce qu'on appellera plus tard les espaces de Hilbert (d'abord sous la forme de l'espace ℓ^2 des séries de carré sommable et de celui des fonctions de carré intégrable au sens de Lebesgue, noté L^2). Puis, interviennent des espaces plus sophistiqués, tel que les espaces L^p, avec leur dual L^q (où $p > 1$ et $p^{-1} + q^{-1} = 1$), pour atteindre enfin les espaces les plus généraux.

L'analogie avec la résolution des systèmes linéaires et d'autres problèmes de la dimension finie est toujours présente. Cependant, la répétition des mêmes types de démarches, dans des cadres de plus en plus généraux, et l'introduction du langage géométrique, permettent graduellement de dégager des similitudes (avant tout en terme de structure topologique). Ceci conduit à l'émergence du concept d'espace fonctionnel, où la nature topologique prime d'abord sur l'aspect algébrique souvent implicite. En ce sens, la possibilité d'introduire une structure topologique intrinsèque entre fonctions sans passer par une infinité de coordonnées et une généralisation de la norme euclidienne ont permis un traitement plus synthétique des problèmes d'analyse fonctionnelle dont l'aboutissement est une théorie axiomatique, où la structure d'espace vectoriel normé est centrale. Dégageons maintenant les grandes lignes de l'évolution ainsi esquissée[1].

1. LES DÉBUTS DE L'ALGÈBRE LINÉAIRE EN DIMENSION INFINIE

De nombreux problèmes « traditionnels » issus de la physique (corde vibrante, équation de la chaleur, mouvement des planètes, etc.) conduisent à l'étude de systèmes d'équations différentielles ou aux dérivées partielles linéaires. Depuis la fin du XVIIIe siècle, ces problèmes étaient abordés avec les outils et les méthodes liées aux déterminants et, plus tard, aux

[1] En complément de notre approche, on pourra également consulter sur l'histoire des espaces fonctionnels : [Pincherle 1912], [Hadamard 1912], [Hellinger et Toeplitz 1927], [Bernkopf 1966, 1968], [Monna 1973], [Dieudonné 1981] et [Pécot 1992, 1993a,b].

matrices et aux formes bilinéaires. Qu'une combinaison linéaire de solutions d'une équation ou d'un système d'équations différentielles linéaires homogènes soit aussi une solution, qu'on obtienne la solution générale de l'équation complète en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène une solution particulière, étaient des résultats connus depuis longtemps. L'utilisation d'outils plus sophistiqués, comme le Wronskien, a permis de donner à l'étude des équations différentielles linéaires un corpus théorique, directement lié à la théorie des déterminants, mais assez spécifique. C'est dans la lignée de ces travaux qu'à la fin du XIX^{e} siècle se constitue un élargissement à un nombre infini de variables du corpus théorique déjà existant en dimension finie (voir [Dorier 1995]).

Dès 1822, Joseph Fourier utilisant des développements en série pour résoudre des équations fonctionnelles, différentielles et aux dérivées partielles étudie des systèmes d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues [Fourier 1822, p. 149, 187]. Les connaissances de l'époque sur la convergence des séries et les conditions sous lesquelles on pouvait les dériver ne lui ont pas permis de donner une approche entièrement rigoureuse de ce problème, mais il a pu ainsi mettre en place les principes élémentaires de résolution de tels systèmes : étude du sous-système tronqué à l'ordre n, puis passage à la limite quand n tend vers l'infini (dénommé *principe des réduites*). Il semble cependant que les travaux de Fourier soient restés dans l'oubli pendant près d'un demi-siècle. Après quelques tentatives dues entre autres à Fürstenau en 1860 et Koetteritzsch en 1870, c'est à George William Hill [1877], Henri Poincaré [1886] et Helge von Koch [1891, 1892] que l'on doit les résultats fondamentaux sur les systèmes linéaires infinis, selon le principe des réduites. Ces travaux ont permis de jeter les bases d'un élargissement de la théorie des déterminants à la dimension infinie. Le problème n'était pas purement algébrique, il fallait bien sûr savoir ce qu'on acceptait comme solution, c'est-à-dire quelle restriction donner sur la convergence. En 1913, Frédéric Riesz disait de ces débuts :

«*Pour appliquer la méthode classique des déterminants aux systèmes infinis, il fallait imposer des conditions plus ou moins restrictives, et il faut bien avouer que c'est la méthode et non le problème qui exigeait ces restrictions*» [Riesz 1913, p. 876].

Ajoutons que, dans ce cadre, la théorie des déterminants restait l'outil essentiel. Pourtant, assez rapidement, la lourdeur et l'extrême technicité des méthodes associées les firent remettre en cause. Ainsi, en 1909, Otto Toeplitz écrit en introduction d'un texte sur la résolution des systèmes linéaires infinis :

«*On a coutume de déduire les théorèmes sur la résolution de n équations linéaires à n inconnues à l'aide de la théorie des déterminants. On peut cependant distinguer parmi ces théorèmes, ceux dont le* contenu *ne comporte rien en rapport avec le concept de déterminant (même si leur démonstration usuelle n'en est pas exempte), de ceux dont on ne peut formuler l'*énoncé *sans parler de déterminant.* [...] *Dans ce qui suit nous allons élargir, d'une façon particulière, les théorèmes de la première classe aux systèmes* infinis *d'équations linéaires*»[2].

Ainsi Toeplitz démontre d'une façon très formelle l'équivalence de tout système linéaire fini avec un système triangulaire, en reliant cette méthode au concept de rang. Il élargit ensuite sa méthode au cas des systèmes *zeilenfinite* c'est-à-dire d'une infinité d'équations à une infinité d'inconnues, mais tels que chaque équation ne fait intervenir qu'un nombre fini de variables. Il utilise ce résultat pour exprimer le théorème dit de l'alternative sur les conditions d'existence d'une solution et la dimension de l'ensemble des solutions. L'approche de Toeplitz restera isolée, elle montre bien pourtant la difficulté théorique liée au passage du fini à l'infini. En fait, les modifications vont se faire petit à petit sur plusieurs fronts, dans des contextes parfois assez éloignés.

2. PEANO, PINCHERLE : APPROCHES AXIOMATIQUES PRÉCOCES

La première définition axiomatique de la structure d'espace vectoriel remonte à 1888, et fut donnée dans le *Calcolo geometrico* de Giuseppe Peano [1888a, p. 141–142]. Cette définition apparaît à la fin d'un traité présentant une partie de l'*Ausdehnungslehre* de Hermann Grassmann, et

---

[2] «*Die Sätze über die Auflösung von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten pflegt man mit Hilfe der Theorie der Determinanten abzuleiten. Man kann jedoch unter diesen Sätzen solche, deren* Inhalt *den Determinantenbegriff garnicht enthält (wenn auch der übliche Beweis nicht davon frei ist), von den übrigen scheiden, deren* Wortlaut *man nicht formulieren könnte, ohne von Determinanten zu reden.* [...] *Im folgenden sollen die Sätze der ersten Classe auf eine besondere Art auf* unendliche *lineare Gleichungssysteme übertragen werden*» [Toeplitz 1909, p. 88–89].