Revue d'histoire des mathématiques,
3 (1997), p. 49–97.

L'ÉLABORATION PAR RIEMANN D'UNE DÉFINITION DE LA DÉRIVATION D'ORDRE NON ENTIER

Stéphane DUGOWSON (*)

RÉSUMÉ. — Cet article étudie le contenu et la réception du mémoire peu connu *Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation* (Essai d'une conception générale de l'intégration et de la dérivation) que Riemann a consacré dans sa jeunesse à la dérivation d'ordre non entier. En revendiquant l'héritage de Lagrange et en utilisant des séries divergentes, il s'y oppose directement à Cauchy. Un siècle plus tard, Hardy montre qu'une partie des considérations développées par Riemann peut être interprétée à la lumière de la théorie des séries divergentes de Borel. La question reste toutefois en partie ouverte de savoir si cela est possible pour l'ensemble des calculs de Riemann et notamment ceux concernant les fonctions complémentaires. On trouvera en appendice le texte de Riemann traduit pour la première fois en français.

ABSTRACT. — RIEMANN'S WORK ON DEFINING THE CONCEPT OF A FRACTIONAL CALCULUS. This paper examines the content, and subsequent reception, of Riemann's early, and little-noted, memoir *Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation* (An attempt at a general conception of integration and differentiation), in which he propounded his concept of a fractional calculus. Taking his cue from Lagrange's contribution to the treatement of the calculus, and bringing in divergent series, he adopted a stance directly at odds with Cauchy's. A century further on, Hardy showed that, in some respects, Riemann's arguments may be reinterpreted on the lines of Borel's theory of divergent series. It is still an open question, however, whether this calculus is altogether amenable to such a reading – most notably regarding the matter of complementary functions. Appended to this reappraisal is the first-ever translation into French of Riemann's paper.

> «*Les séries divergentes sont, en général, quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on ose y fonder aucune démonstration. On peut démontrer tout ce qu'on veut en les employant, et ce sont elles qui ont fait tant de malheurs et qui ont enfanté tant de paradoxes.*»
>
> Abel [1826]

(*) Texte reçu le 17 avril 1996, révisé le 25 mars 1997.
Stéphane DUGOWSON, ISMCM–CESTI, 3 rue Fernand Hainaut,
93407 Saint Ouen CEDEX (France). Courrier électronique : sdugo@hol.fr.

INTRODUCTION

La tenue de plusieurs colloques internationaux[1], la parution de plusieurs livres[2] et même la création, en 1992, d'une revue entièrement consacrée au sujet, *Journal of fractional calculus*, témoignent de la vitalité actuelle de la recherche sur la dérivation d'ordre non entier. Deux raisons principales semblent expliquer cet intérêt grandissant : d'une part, l'utilisation de la dérivation d'ordre non entier dans le cadre d'applications variées (automatique, analyse d'image, viscoélasticité, diffusion fractale, etc.[3]) permet d'améliorer les modèles classiquement utilisés et de créer de nouveaux outils d'ingénierie ; d'autre part, d'un point de vue strictement mathématique, les nombreuses propriétés de la dérivation d'ordre généralisé en font un outil d'analyse intéressant [Srivastava et Owa 1989].

Ces recherches s'appuient, en général, sur une définition de la dérivation d'ordre non entier construite à partir de l'*intégrale de Riemann-Liouville*

$$_{x_0}I^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t.$$

Lorsque α est un entier strictement positif, on vérifie que cette formule fournit une primitive d'ordre α de la fonction f. Il peut sembler naturel, lorsque α est positif non entier, de définir par cette même formule la primitive d'ordre α et d'origine x_0 de la fonction f ; on obtient ainsi une fonction définie pour $x > x_0$. Cette définition est légitimée par le fait que, lorsque α_1 et α_2 sont des réels strictement positifs, la *loi des indices* est vérifiée

$$_{x_0}I^{\alpha_1} \circ {}_{x_0}I^{\alpha_2} = {}_{x_0}I^{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Pour définir les dérivées d'ordre positif non entier, on ne peut utiliser directement l'intégrale de Riemann-Liouville, généralement divergente lorsque $\alpha < 0$. Pour s'affranchir de cet obstacle, le plus simple consiste à prendre les dérivées d'ordre entier des primitives d'ordre non entier de

---

[1] New Haven en juin 1974 [Ross 1975a], Strathclyde en août 1984 [McBride et Roach 1985], Koriyama en mai 1988 [Srivastava et Owa 1989], Tokyo en mai 1989 (voir Nishimoto [1992]), Bordeaux en juillet 1994 [Le Méhauté et Oustaloup 1994].

[2] Oldham et Spanier [1974] ; Nishimoto [1984–1991] ; Samko, Kilbas et Marichev [1993] ; Oustaloup [1995].

[3] Voir Le Méhauté [1990, p. 67–79], Oustaloup [1995].

la fonction considérée. Ce procédé équivaut à effectuer un prolongement analytique par rapport à l'ordre α, ou encore à prendre la partie finie au sens de Hadamard de l'intégrale divergente donnée par la formule de Riemann-Liouville.

Ceci suggère que les distributions constituent un cadre adéquat pour cette définition. Laurent Schwartz [1966, p. 174] a consacré quelques pages à cette question, dans le cas de distributions à support dans $\mathbb{R}_+$: la dérivée d'ordre α et d'origine 0 d'une distribution est le produit de convolution de celle-ci par la «*puissance de convolution*» d'ordre $-\alpha$ de la fonction de Heaviside. Une formulation équivalente peut être donnée dans le corps de convolution de Mikusiński [Erdélyi 1971]. Grâce à l'utilisation de fonctions généralisées, la loi des indices continue d'être vérifiée à tous les ordres, ce qui n'est pas le cas des définitions fondées sur la seule utilisation des fonctions classiques [Oldham et Spanier 1974].

L'appellation « intégrale de Riemann-Liouville », utilisée par Marcel Riesz [1949], pourrait laisser penser que le mémoire de Riemann *Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation*, objet du présent article, marque la naissance de la dérivation d'ordre non entier. Nous verrons que Riemann lui-même devait sans doute le croire. En fait, depuis que Bertram Ross, à qui l'on doit plusieurs articles consacrés à l'histoire de la dérivation d'ordre non entier [Ross 1975b, 1977], a établi une chronologie du sujet [Ross 1974], on ne peut plus ignorer que cette généralisation est née cent cinquante ans avant que Riemann n'écrive son mémoire. Il appartient, en effet, à Leibniz [1695] d'avoir, le premier, conçu ces *différences métaphysiques*[4]. Euler [1730] donne la première expression non triviale d'une dérivée d'ordre non entier ; l'article d'Euler où apparaît cette expression est, par ailleurs, assez célèbre, car il contient également la première formule intégrale pour l'interpolation de la factorielle[5] (« intégrale eulérienne »). Dans la *Théorie analytique de la chaleur*, Fourier donne, dans le cadre de son analyse, une définition de la dérivée d'une fonction à un ordre quelconque[6] [1822, p. 507]. L'année suivante, Abel[7] [1823] exprime sa solution du problème de la tautochrone

[4] Voir Parmentier [1989, p. 410–413], Dugowson [1994, p. 33–54].

[5] Voir Dugowson [1994, p. 55].

[6] *Ibid.*, p. 56–58.

[7] Voir Lützen [1990, p. 314–315], Dugowson [1994, p. 58–60].

sous la forme d'une primitive d'ordre $\frac{1}{2}$. Au début des années 1830, Liouville [1832a,b,c] commence la publication d'une série de mémoires constituant la première véritable théorie de la dérivation d'ordre non entier[8].

On le voit, ni l'ordre alphabétique, ni l'ordre chronologique n'explique la première place attribuée à Riemann dans l'expression « formule de Riemann-Liouville ». Cette expression n'est pourtant pas injuste dans la mesure où, si l'étonnante théorie développée par Liouville contient des expressions équivalentes à cette formule dans les cas particuliers où $x_0 = \pm\infty$, Riemann reste néanmoins le premier à l'avoir écrite en toute généralité.

Pour des raisons sur lesquelles nous reviendrons, Riemann, encore étudiant lorsqu'il le rédigea en 1847, n'a pas souhaité faire connaître son essai ; celui-ci ne sera publié qu'après la mort du mathématicien allemand, dans les *Œuvres* éditées en 1876 par Heinrich Weber avec l'assistance de Richard Dedekind.

Dans la première partie du présent article, nous tâchons de dégager les enjeux de ce mémoire de Riemann. La seconde partie est essentiellement une introduction à la lecture du mémoire, dont une traduction française est proposée en appendice ; nous y mettons en évidence les étapes de la démarche suivie par Riemann et analysons certains passages importants ou délicats. La troisième partie concerne la réception du mémoire de Riemann. Enfin, dans une dernière partie, nous revenons sur le problème des « fonctions complémentaires », c'est-à-dire de la multivocité des opérateurs de dérivation d'ordre non entier.

1. LES ENJEUX DU MÉMOIRE DE RIEMANN

L'objectif de Riemann est clairement annoncé au début de son article : il s'agit de généraliser la dérivation aux ordres non entiers. Contrairement à Liouville, chez qui une telle généralisation répondait au besoin de disposer d'un outil adapté à la résolution d'équations issues de la physique[9],

[8] On trouvera une étude approfondie de la théorie de Liouville dans l'ouvrage que J. Lützen a consacré au mathématicien français [1990, p. 303–349]. Voir aussi Dugowson [1994, p. 65–111].

[9] Voir Lützen [1990, p. 307–312].

Riemann considère ce problème pour lui-même : aucune application, même purement mathématique, n'est évoquée.

Par ailleurs, à l'époque où il rédige son article, Riemann ignore que d'autres mathématiciens se sont penchés sur la question. L'absence de référence aux théories antérieures à la sienne ne laisse, en effet, guère de doute à cet égard, dans la mesure où, à la fois profonde et originale, la théorie du jeune mathématicien aurait pu tirer avantage d'une confrontation à ces théories. En effet, aussi bien les formules écrites par Euler et Abel que la formule utilisée par Liouville comme fondement de sa propre théorie apparaissent comme des cas particuliers dans la théorie de Riemann[10], alors même que ces formules semblaient incompatibles, comme l'avait noté Liouville [1834, p. 15]. De plus, Riemann ne mentionne la «*limite d'un quotient de grandeurs évanouissantes*»[11] que pour écarter l'idée qu'une telle limite puisse servir à fonder la généralisation visée : cela confirme qu'il ignorait la théorie de Liouville, celui-ci ayant montré que ses «*différentielles à indices quelconques*» pouvaient être exprimées par de telles limites [Liouville 1832b, p. 111–112]. Que Riemann ait ignoré la théorie de Liouville n'a d'ailleurs rien d'étonnant, vu le peu d'écho rencontré, en France même, par les centaines de pages parfois déroutantes dans lesquelles Liouville a exposé sa théorie. Quant aux contributions d'Abel, de Fourier, d'Euler ou de Leibniz, elles étaient trop succinctes pour qu'on puisse s'étonner qu'un étudiant, fût-il Riemann, ne les connaisse pas, alors qu'il ignorait le texte de Liouville [1832a, p. 2] où elles sont, pour la plupart, mentionnées.

Malgré cette absence d'application et de référence aux travaux antérieurs sur le même thème, le travail de Riemann n'est pas coupé des préoccupations mathématiques de son temps[12]. Au contraire, en choisis-

[10] Les formules d'Euler et d'Abel correspondent à une origine nulle dans l'intégrale par laquelle Riemann définit la dérivation d'ordre quelconque ; l'égalité entre l'exponentielle et sa dérivée à un ordre quelconque, sur laquelle est fondée la théorie de Liouville, constitue l'avant-dernière formule du mémoire de Riemann. Précisons toutefois que, si les calculs d'Euler et d'Abel peuvent être entièrement repris dans le cadre de la théorie de Riemann, il n'en va pas de même pour ceux de Liouville : en particulier, les «fonctions complémentaires» de Liouville et celles de Riemann sont tout à fait distinctes.

[11] «*die Grenze des Quotienten verschwindender Grössen*» [Riemann 1847/1892, p. 354].

[12] Le récent ouvrage de D. Laugwitz [1996] aborde la question de la place de ce mémoire dans l'analyse mathématique de l'époque. Pour Laugwitz, ce travail de jeunesse se