

**352**

**ASTÉRISQUE**

**2013**

SÉMINAIRE BOURBAKI  
VOLUME 2011/2012  
EXPOSÉS 1043-1058

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

*Comité de rédaction*

Ahmed ABBES	Damien GABORIAU
Viviane BALADI	Michael HARRIS
Laurent BERGER	Fabrice PLANCHON
Gérard BESSON	Pierre SCHAPIRA
Philippe BIANE	Bertrand TOEN
Hélène ESNAULT	

Éric VASSEROT (dir.)

*Diffusion*

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

*Tarifs*

*Vente au numéro* : 94 € (\$ 141)

*Abonnement* Europe : 485 €, hors Europe : 523 € (\$ 784)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat : Nathalie Christiaën*

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2013

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-371-3

Directrice de la publication : Aline BONAMI

---

**352**

**ASTÉRISQUE**

**2013**

SÉMINAIRE BOURBAKI  
VOLUME 2011/2012  
EXPOSÉS 1043-1058

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki.

École normale supérieure,

45, rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05.

URL : <http://www.bourbaki.ens.fr>

---

*Mots-clefs et classification mathématique par sujets (2000)*

**Exposé n° 1043.** — Orbites coadjointes, représentations des groupes de Lie compacts, représentations des groupes algébriques réductifs, théorie géométrique des invariants, variétés de drapeaux — 14L24, 14M15, 17B08, 20G05, 22E46.

**Exposé n° 1044.** — Vlasov-Poisson, système stellaire auto-gravitant, champ moyen, stabilité orbitale, réarrangement, Hamiltonien, nonlinéaire, équation aux dérivées partielles, concentration-compacité — 35xx, 35Qxx, 35Q83, 37xx, 37Nxx, 37N20, 82xx, 82Cxx, 85xx, 85Axx.

**Exposé n° 1045.** — Algorithme d'approximation, difficulté d'approximation, plongement métrique, programmation semi-définie, choix social — 05C12, 05C85, 46N10, 68Q17, 68R10, 68W25, 90C22, 91B14.

**Exposé n° 1046.** — Équations différentielles partielles — 35Qxx.

**Exposé n° 1047.** — Programme de Ribe, espaces métriques, espaces normés, rigidité — 46B85.

**Exposé n° 1048.** — Multizêtas, motifs de Tate mixtes, groupe de Galois motivique — 11G99.

**Exposé n° 1049.** — Courbe elliptique, rang, groupe de Selmer, forme quartique binaire — 11G05, 11E76.

**Exposé n° 1050.** — Fibré holomorphe plat, fibré de Higgs, métrique harmonique, singularités irrégulières, D-module holonome, théorie de Hodge, théorème de Lefschetz difficile — 14J60, 32C38, 53C07.

**Exposé n° 1051.** — Relativité générale, trous noirs, équations d'Einstein, surfaces enfermées — 83C57, 83C75, 83C05, 35L67.

**Exposé n° 1052.** — Formule de KPZ, gravité quantique, cartes planaires, carte brownienne, champ libre gaussien, mesures de Liouville — 60C05, 60F17, 60-02, 05C10, 05C80, 82B20, 82B05, 82B27.

**Exposé n° 1053.** — Résonances en espace temps, existence globale, équations non-linéaires dispersives, condition nulle — 35B34, 35E20, 35B60, 35Q60, 35Q35.

**Exposé n° 1054.** — Progression arithmétique, configuration polynomiale, norme d'uniformité, principe de transfert — 11B30, 11N13, 11B25.

**Exposé n° 1055.** — Mélange exponentiel du fibré des repères, variétés hyperboliques de dimension 3, groupes quasi-fuchsien — 57-99, 30F99, 53-99.

**Exposé n° 1056.** — Espaces de Berkovich, modération topologique, types stablement dominés — 03C64, 03C65, 03C99, 14G22.

**Exposé n° 1057.** — Espaces perfectoïdes, espaces adiques, topologie étale, pureté, monodromie-poids — 11G25, 14F20, 14G20, 14G22.

**Exposé n° 1058.** — Groupes de Lie, mesures stationnaires, espaces homogènes, marches aléatoires — 22E40, 37D40, 60B99.

---

**SÉMINAIRE BOURBAKI**  
**VOLUME 2011/2012**  
**EXPOSÉS 1043–1058**

**Résumé.** — Ce 64<sup>e</sup> volume du Séminaire Bourbaki regroupe les textes des seize exposés de synthèse sur des sujets d'actualité effectués pendant l'année 2011/2012 : un d'analyse fonctionnelle, un de complexité d'algorithmes, deux d'équations aux dérivées partielles, quatre de géométrie algébrique, un de géométrie différentielle, un de théorie ergodique, trois de théorie des nombres et trois de physique mathématique.

**Abstract (Séminaire Bourbaki, volume 2011/2012, exposés 1043–1058)**

This 64th volume of the Bourbaki Seminar contains the texts of the sixteen survey lectures done during the year 2011/2012: one about functional analysis, one about complexity of algorithms, two on partial differential equations, four on algebraic geometry, one about differential geometry, one about ergodic theory, three on number theory and three other lectures on mathematical physics.



Résumés des exposés .....	vii
---------------------------	-----

## NOVEMBRE 2011

1043	M. BRION — <i>Restriction de représentations et projections d'orbites coadjointes (d'après Belkale, Kumar et Ressayre)</i> .....	1
1044	C. MOUHOT — <i>Stabilité orbitale pour le système de Vlasov-Poisson gravitationnel (d'après Lemou-Méhats-Raphaël, Guo, Lin, Rein et al.)</i> .....	35
1045	P. PANSU — <i>Difficulté d'approximation (d'après Khot, Kindler, Mossel, O'Donnell,...)</i> .....	83
1046	P. RAPHAËL — <i>Concentration compacité à la Kenig-Merle</i> .....	121

## JANVIER 2012

1047	K. BALL — <i>The Ribe Programme</i> .....	147
1048	P. DELIGNE — <i>Multizêtas, d'après Francis Brown</i> .....	161
1049	B. POONEN — <i>Average rank of elliptic curves (after Manjul Bhargava and Arul Shankar)</i> .....	187
1050	C. SABBAH — <i>Théorie de Hodge et correspondance de Hitchin-Kobayashi sauvages (d'après T. Mochizuki)</i> .....	205

## MARS 2012

1051	M. DAFERMOS — <i>The formation of black holes in general relativity (after D. Christodoulou)</i> .....	243
1052	C. GARBAN — <i>Quantum gravity and the KPZ formula (after Duplantier-Sheffield)</i> .....	315
1053	D. LANNES — <i>Space time resonances (after Germain, Masmoudi, Shatah)</i> .....	355
1054	J. WOLF — <i>Arithmetic and polynomial progressions in the primes (after Gowers, Green, Tao and Ziegler)</i> .....	389

## JUIN 2012

1055	N. BERGERON — <i>La conjecture des sous-groupes de surfaces (d'après Jeremy Kahn et Vladimir Markovic)</i> .....	429
1056	A. DUCROS — <i>Les espaces de Berkovich sont modérés (d'après Ehud Hrushovski et François Loeser)</i> .....	459
1057	J.-M. FONTAINE — <i>Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids (d'après Peter Scholze)</i> .....	509
1058	F. LEDRAPPIER — <i>Mesures stationnaires sur les espaces homogènes (d'après Yves Benoist et Jean-François Quint)</i> .....	535

M. BRION — *Restriction de représentations et projections d'orbites coadjointes (d'après Belkale, Kumar et Ressayre)*

Étant donné un groupe de Lie compact connexe  $K$  et un sous-groupe fermé connexe  $L$ , quelles sont les représentations irréductibles de  $L$  qui apparaissent dans la restriction d'une représentation irréductible de  $K$  ? Comment une orbite de  $K$  dans la duale de sa représentation adjointe se projette-t-elle sur la représentation co-adjointe de  $L$  ? L'exposé présentera des progrès récents dans ces deux problèmes classiques, dus principalement à Belkale, Kumar et Ressayre à la suite de travaux de Klyachko, Berenstein–Sjamaar, Knutson–Tao–Woodward... Ils mettent en œuvre de nouveaux développements du calcul de Schubert et de la théorie géométrique des invariants.

C. MOUHOT — *Stabilité orbitale pour le système de Vlasov-Poisson gravitationnel (d'après Lemou-Méhats-Raphaël, Guo, Lin, Rein et al.)*

Le système de Vlasov-Poisson gravitationnel est le principal modèle pour décrire les systèmes stellaires auto-gravitants. C'est un système d'équations aux dérivées partielles non-linéaire réversible en temps où l'interaction est décrite par le champ de gravitation moyen entre les étoiles. Il était conjecturé depuis longtemps que certaines solutions stationnaires, qui sont des fonctions monotones de l'énergie microscopique, sont non-linéairement stables. Le caractère « orbital » de cette stabilité provient de l'invariance par translation en espace de l'équation. La preuve au niveau linéaire était connue depuis les travaux fondateurs d'Antonov dans les années 1960, mais le problème restait ouvert au niveau non-linéaire. Dans une série d'articles récents, Lemou, Méhats et Raphaël résolvent cette conjecture. Nous évoquerons également les avancées précédentes sur ce problème, et en particulier les travaux de Guo et Rein (ainsi que ceux de Dolbeault, Lin, Sánchez, Schaeffer, Soler, Wolansky...).

P. PANSU — *Difficulté d'approximation (d'après Khot, Kindler, Mossel, O'Donnell,...)*

Du point de vue de la complexité algorithmique, de nombreux problèmes d'optimisation combinatoire (comme MAX 3SAT, MAX CUT, SPARSEST CUT) sont équivalents à première vue : ils sont NP-complets. Dans certains cas, même des versions approchées, où on se contente d'une solution qui réalise une fraction donnée de l'optimum, restent NP-complètes. C'est l'essence du théorème PCP (1992). Depuis peu, pour MAX CUT, on conjecture la valeur exacte du seuil d'approximabilité. Cela fait intervenir de la géométrie et de l'analyse harmonique discrète.

P. RAPHAËL — *Concentration compacité à la Kenig-Merle*

Dans leur article de référence de 2006 [C.E. Kenig, F. Merle, *Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case*, Invent. Math. 166 (2006), 645-675], Kenig et Merle obtiennent la première démonstration *critique* de classification de l'onde solitaire pour une équation dispersive non-linéaire critique : cette onde exceptionnelle est la *premier* objet nonlinéaire, car c'est la *plus petite dynamique compacte* aux symétries du flot près. Je tenterai de tracer l'historique et de montrer quelques ramifications de ce théorème fondamental qui s'inscrit au sein d'une activité internationale très importante, et d'illustrer l'influence de plusieurs domaines de l'analyse, et entre autre une idée simple et profonde issue des techniques variationnelles des années 1980 : la méthode de concentration compacité de P.-L. Lions.

K. BALL — *The Ribe Programme*

Following a remarkable rigidity principle discovered by M. Ribe, Bourgain proposed a programme to transfer the subtle geometric theory of finite-dimensional normed spaces to the class of general metric spaces: a programme which has had some striking successes and a number of intriguing applications to the theory of algorithms. This lecture will describe the most successful part of the programme, from the original work of Bourgain to recent developments by Mendel and Naor.

P. DELIGNE — *Multizêtas, d'après Francis Brown*

Les nombres multizêtas  $\zeta(s_1, \dots, s_k)$  ( $s_i$  entiers  $\geq 1$ ), définis par Euler comme sommes infinies, sont aussi des « périodes ». Ils déterminent la structure de Hodge mixte du groupe fondamental rendu unipotent de  $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ . On s'attend à ce que les relations  $\mathbb{Q}$ -linéaires entre eux reflètent des structures provenant de la géométrie algébrique sur ce  $\pi_1$ .

Nous expliquerons comment F. Brown utilise ces idées pour définir une notion de « bonne » relation  $\mathbb{Q}$ -linéaire entre multizêtas (on espère que toute relation  $\mathbb{Q}$ -linéaire est bonne), pour montrer qu'entre les  $\zeta(s_1, \dots, s_k)$ , avec  $s_i \in \{2, 3\}$ , il n'y a pas de bonne relation  $\mathbb{Q}$ -linéaire non triviale, et pour en déduire que tout nombre multizêta est combinaison linéaire de ces nombres multizêtas particuliers, et que le  $\pi_1$  ci-dessus engendre la catégorie tannakienne de motifs de Tate mixtes sur  $\mathbb{Z}$ .

B. POONEN — *Average rank of elliptic curves (after Manjul Bhargava and Arul Shankar)*

Bhargava and Shankar prove that as  $E$  varies over all elliptic curves over  $\mathbb{Q}$ , the average rank of the finitely generated abelian group  $E(\mathbb{Q})$  is bounded. This result follows from an exact formula for the average size of the 2-Selmer group, which in turn follows from an asymptotic formula for the number of binary quartic forms over  $\mathbb{Z}$  with bounded invariants. We explain their proof, as well as other arithmetic applications.

C. SABBAAH — *Théorie de Hodge et correspondance de Hitchin-Kobayashi sauvages (d'après T. Mochizuki)*

T. Mochizuki construit une théorie de variations de structure de Hodge « sauvage » pour laquelle la connexion holomorphe plate sous-jacente peut avoir des singularités irrégulières à l'infini. Il propose ainsi une généralisation de la correspondance de Corlette et Simpson entre fibrés plats irréductibles et fibrés de Higgs stables, qui admet des objets à singularités irrégulières. Une application en est la démonstration d'une conjecture de M. Kashiwara sur la validité du théorème de Lefschetz difficile lorsque les coefficients sont le complexe de de Rham d'un D-module holonome simple sur une variété projective lisse complexe.

M. DAFERMOS — *The formation of black holes in general relativity (after D. Christodoulou)*

Black holes are one of the most fascinating predictions of General Relativity. Although the most basic explicit solutions (Schwarzschild, Kerr) of the Einstein Vacuum Equations already describe black hole geometries, it remained an open question to understand whether black holes emerge in evolution from the collapse of initially arbitrarily dispersed pure gravitational waves. This talk will describe a recent landmark result of Christodoulou, who proved that this is indeed the case.