Astérisque

PIERRE DOLBEAULT

Sur la théorie des résidus en plusieurs variables

Astérisque, tome 217 (1993), p. 85-101
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__217__85_0>

SUR LA THÉORIE DES RÉSIDUS EN PLUSIEURS VARIABLES

Pierre DOLBEAULT

0 HISTORIQUE ET INTRODUCTION.

0.1

Après plusieurs essais incorrects, la théorie des résidus en plusieurs variables a été fondée par H. Poincaré en 1887 pour les intégrales doubles rationnelles [19] ; E. Picard a établi un théorème fondamental sur les résidus des intégrales simples de troisième espèce sur les surfaces algébriques [18] repris et généralisé par A. Weil [24] sur une variété kählérienne compacte.

Les courants de de Rham ont été introduits dans la théorie des résidus dans les années 30, puis plus systématiquement dans les années 50 avec l'étude de la valeur principale de Cauchy dans des cas particuliers faute de disposer de la réduction des singularités [12], [22], [6].

La théorie de Leray [14] précisée par Norguet [15] est essentiellement cohomologique (1959).

Au début des années 70 le théorème de résolution des singularités d'Hironaka (1964) a permis de définir et d'étudier les valeurs principales et les courants résidus [7], [11] ; les propriétés relatives aux opérateurs différentiels semi-holomorphes, introduites par L. Schwartz [22], ont été systématiquement utilisées, [7].

Des formules de résidus relatives à des généralisations des fonctions méromorphes ont été obtenues peu après [20], [13].

Puis des généralisations des courants résidus au cas d'une famille finie d'hypersurfaces ont été introduites sous le nom de courants résiduels par Coleff-Herrera. Des applications à la cohomologie des courants ont alors été possibles [3], [5].

En 1986, Passare [16] et Yger ont donné de nouvelles définitions des courants résiduels et la structure des courants résiduels a commencé à être étudiée à l'aide de la définition naïve des opérateurs différentiels holomorphes [8],[9]. De nombreux travaux portant sur des hypersurfaces algébriques ou utilisant le complexe de faisceaux des opérateurs différentiels holomorphes sont très récents ou en cours (Yger, Berenstein, Gay, Dickenstein-Sessa, Passare-Tsikh, Bjork...).

0.2 Le but de cet article d'exposition est, après un rappel de la situation à une variable et des définitions les plus faciles à décrire, d'indiquer une interprétation de morphismes en homologie et en cohomologie à l'aide des courants résiduels dans l'esprit de la théorie de Leray selon ([1], chapitre I) et une relation entre les courants résiduels et les résidus composés introduits initialement par Leray.

Des résultats récents sur la structure des courants résiduels sont indiqués ([1], chapitre II). Enfin quelques problèmes sont posés et d'autres approches sont décrites succinctement.

Plan :

1. Dimension 1.
2. Formes différentielles semi-méromorphes ; opérateurs différentiels semi-holomorphes.
3. Courants résiduels.
4. Homomorphismes résidus.
5. Structure des courants résiduels dans le cas des croisements normaux.
6. Structure locale des courants résiduels.
7. Problèmes et autres approches.

1 DIMENSION 1.

1.1

Soit U un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{C}$ et $\omega = g(z)$ une fonction méromorphe sur U ayant le seul pôle 0, alors

$$g(z) = \sum_{\ell=1}^{k} a_{-\ell}\, z^{-\ell} + \text{ fonction holomorphe } = h(z)z^{-k}, h \in \mathcal{O}(U), h(0) \neq 0.$$

Pour une forme test $\psi \in \mathcal{D}^2(U), g\psi$ n'est pas intégrable en général, soit

$$I_\varepsilon(\psi) = \int_{|z|\geq\varepsilon} g\psi.$$

On montre facilement, en utilisant les coordonnées polaires au voisinage de 0, que $\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(\psi) = Vp[\omega](\psi)$ existe : $Vp[\omega]$ est un courant (de de Rham) sur U, d'ordre $(k-1)$, indépendant du choix de la coordonnée z et est appelé *valeur principale de Cauchy de* ω.

1.2

Au lieu de g, on considère aussi $\omega = g\alpha$, où α est une forme différentielle C^∞ de degré 0,1,2 sur U ; ω est appelée une forme différentielle *semi-méromorphe* (s.m.) sur U. Alors

$$Vp[\omega](\psi) = Vp[g\alpha](\psi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|z|\geq\varepsilon} g\alpha\wedge\psi, \tag{1.1}$$

par définition, i.e. (1.2)

$$Vp[g\alpha] = Vp[g]\alpha.$$

1.3

Le *courant résidu* de $\omega = g\alpha$, où $\deg\omega = \deg\alpha = r$ est, par définition

$$\mathrm{Res}[\omega] = dVp[\omega] - Vp[d\omega]$$

$\mathrm{Res}[\omega]$ est de degré $r+1$, donc nul si $r\geq 2$. Pour $\varphi\in\mathcal{D}^{1-r}(U)$, la formule de Stokes entraîne

$$\mathrm{Res}[\omega]\varphi = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|z|=\varepsilon}\omega\wedge\varphi.$$

Exemple. Soit $\omega = g\,dz$, alors $d\omega = 0$ sur $U\setminus\{0\}$ et on a

$$\mathrm{Res}[\omega] = 2\pi i\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\,\frac{1}{j!}a_{-j-1}(\partial^j\,/\,\partial z^j)\delta_0 \tag{1.3}$$

$$\mathrm{Res}[\omega] = 2\pi i\,\mathrm{res}_0(\omega)\delta_0 + dB \tag{1.4}$$

où δ_0 est la mesure de Dirac en 0, où $a_{-1} = \mathrm{res}_0(\omega)$ est le résidu de Cauchy de ω en 0 et $B = 2\pi i \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j(1/j!)a_{-j-1}(\partial^{j-1}/\partial z^{j-1})\varepsilon_0 d\bar{z}$ avec $\delta_0 = \varepsilon_0 d\bar{z} \wedge dz$, ε_0 étant un courant de degré 0.

On remarque que spt $\mathrm{Res}[\omega] = \{0\}$, que le courant résidu contient toute l'information sur la partie principale de g en 0, que $\mathrm{Res}[\omega]$ est cohomologue au courant d'intégration $2\pi i\ \mathrm{res}_0(\omega)$ et que

$$\mathrm{Res}[\omega] = D\delta_0$$

où D est l'opérateur différentiel holomorphe $\sum_{j=0}^{k-1} b_j(\partial^j/\partial z^j)$ où $b_j = (-1)^j 2\pi i(1/j!)a_{-j-1}$.

1.4 On se propose de généraliser ce qui précède à plusieurs variables complexes et d'exploiter les généralisations des relations (1.2) et (1.3).

2 FORMES DIFFÉRENTIELLES SEMI-MÉROMORPHES ; - OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS SEMI-HOLOMORPHES.

Soit X une variété analytique complexe, de dimension complexe n, de faisceau structural $\mathcal{O}$.

2.1

Une forme différentielle ω, C^∞ sur un ouvert dense de X est dite semi-méromorphe sur X si tout point $x \in X$ a un voisinage ouvert U_x sur lequel $\omega = \frac{\alpha}{f}$ où $\alpha \in \mathcal{E}^\bullet(U_x)$ (forme différentielle C^∞ sur U_x) ; $f \in \mathcal{O}(U_x)$; $\{z \in U_x\ ;\ f(z) = 0\}$ est appelé un *ensemble polaire* de ω sur U_x.

L'ensemble des germes de formes différentielles semi-méromorphes (s.m.) est un faisceau $\mathcal{S}^\bullet$ de $\mathcal{O}$-modules. L'ensemble $\mathcal{S}^\bullet_Z = \mathcal{E}^\bullet_X(*Z)$ des formes semi-méromorphes sur X ayant leur ensemble polaire contenu dans l'hypersurface complexe Z de X est un sous-faisceau de $\mathcal{O}$-modules de $\mathcal{S}^\bullet$.

2.2

Un opérateur différentiel D sur l'espace $'\mathcal{D}_\bullet(X)$ des *courants* sur X est appelé *semi-holomorphe* (o.d.s.h.) si, pour tout $T \in' \mathcal{D}_\bullet(X)$, tout coefficient