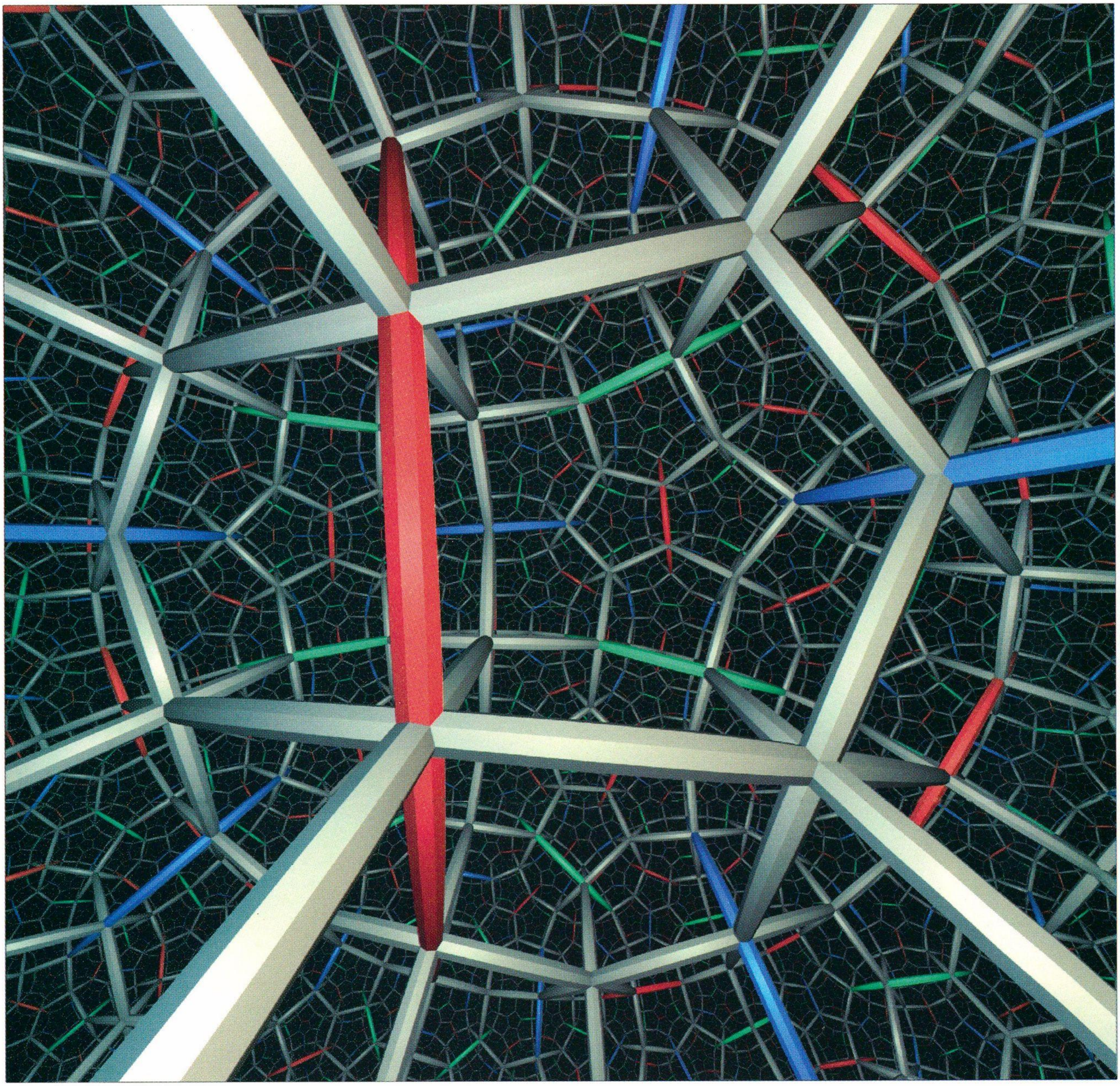
JEAN-PIERRE OTAL

Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3

Astérisque, tome 235 (1996)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__235__R1_0>



"Le pavage de l'espace hyperbolique par des dodécaèdres réguliers à angles droits"

235 ASTÉRISQUE

1996

LE THÉORÈME D'HYPERBOLISATION POUR LES VARIÉTÉS FIBRÉES DE DIMENSION 3

Jean-Pierre OTAL

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Classification AMS : 57M07, 57M50, 20E08, 51M10

INTRODUCTION

Le but de ce livre est de donner une démonstration complète du théorème d'hyperbolisation de Thurston pour les variétés de dimension 3 qui sont fibrées en surfaces. Dans cette introduction, nous allons d'abord situer ce théorème par rapport au théorème d'hyperbolisation dans sa généralité **[Thu3]**. Ensuite, nous décrirons les étapes principales de la démonstration que nous proposons pour le cas fibré.

Il existe actuellement deux références pour le cas fibré : un exposé de D. Sullivan au séminaire Bourbaki **[Sul]**, et un article non publié de W. Thurston **[Thu5]**. Dans ce livre, nous suivrons le plan de la démonstration que Thurston propose, mais l'étape essentielle — "le théorème de la limite double" — sera abordée d'une manière nouvelle.

Dans la suite, les variétés seront (sauf indication contraire) toutes orientables et différentiables.

Le théorème d'hyperbolisation de Thurston donne une condition *suffisante* sur la topologie d'une variété compacte de dimension trois pour que son intérieur soit une *variété hyperbolique*, c'est-à-dire, admette une métrique riemannienne complète de courbure constante égale à -1.

Théorème d'hyperbolisation (*cf.* **[Thu3]**). — *Soit M une variété compacte de dimension trois. Si M est irréductible, atoroïdale et suffisamment grande, alors l'intérieur de M est une variété hyperbolique.*

On dit qu'une variété M de dimension trois est *irréductible* si tout plongement $S^2 \to M$ de la sphère $S^2 = \partial B^3$ se prolonge en un plongement de la boule B^3.

Une variété de dimension trois M est *atoroïdale* lorsque tout sous-groupe $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ du groupe fondamental de M est conjugué à un sous-groupe contenu dans le groupe fondamental d'une composante du bord de M.

Une variété irréductible de dimension trois M est *suffisamment grande* si elle contient une surface *incompressible*, c'est-à-dire une surface orientable S, proprement plongée dans M, de caractéristique d'Euler négative ou nulle, et telle que :

(i) le groupe fondamental de S s'injecte dans celui de M ;

(ii) S ne peut pas être déformée dans ∂M.

Par exemple, lorsque M est irréductible et atoroïdale, elle est suffisamment grande lorsqu'elle contient une surface de caractéristique d'Euler négative dont le groupe fondamental s'injecte dans celui de M.

L'hypothèse *irréductible* est nécessaire pour que l'intérieur de M porte une métrique hyperbolique. En effet, si l'intérieur de M porte une métrique hyperbolique complète, son revêtement universel est difféomorphe à $\mathbb{R}^3$: tout plongement de la sphère dans M se relève en un plongement de la sphère dans $\mathbb{R}^3$, lequel se prolonge en un plongement de la boule d'après le théorème d'Alexander. Puisque l'action du groupe fondamental $\pi_1(M)$ sur son revêtement universel est sans point fixe, ce plongement de la boule dans $\mathbb{R}^3$ se projette en un plongement de la boule dans M.

L'hypothèse *atoroïdale* est, elle aussi, nécessaire : c'est une conséquence immédiate du célèbre lemme de Margoulis qui, appliqué dans ce contexte, classifie les sous-groupes abéliens d'un réseau dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ (cf. chapitre 1).

Par contre, l'hypothèse *suffisamment grande* n'est pas du tout nécessaire pour que l'intérieur de M soit hyperbolique; conjecturellement on peut la remplacer par l'hypothèse (nécessaire) que le groupe fondamental de M est infini.

Toutefois, l'hypothèse *suffisamment grande* reste fondamentale pour la démonstration, comme bien souvent en topologie de dimension trois (cf. [**Wa**]). En effet, lorsqu'on découpe M le long d'une surface orientable et connexe S, on obtient une variété N de dimension trois qui est plus simple en un certain sens. Le bord de N contient deux copies de S; supposons que l'on sache munir l'intérieur de N d'une structure hyperbolique : W. Thurston a alors observé vers 1977 que le problème du recollement de cette structure hyperbolique sur N en une structure sur M se ramène, dans beaucoup de cas, à un problème de point fixe dans l'espace de Teichmüller de S pour une certaine application, *l'application d'épluchage.*

Théorème de point fixe pour l'application d'épluchage (*cf.* [**Thu3**], [**McM1**]). — *Supposons que la variété N n'est pas difféomorphe à un fibré en intervalles sur une surface compacte; alors, l'application d'épluchage a un point fixe si et seulement si M est atoroïdale.*

Ce théorème très difficile représente le coeur de la démonstration du théorème d'hyperbolisation, lorsque N *n'est pas* un fibré en intervalles. Il a été démontré par W. Thurston en 1977. En suivant une approche complètement différente, plus proche de la théorie de Teichmüller classique, Curt McMullen l'a redémontré en 1988 ([**McM1**]; voir aussi [**OP**]).

Ce théorème de point fixe ne suffit pas pour démontrer le théorème d'hyperbolisation dans le cas général, car il ne s'applique pas lorsque N est un fibré en intervalles; dans ce cas d'ailleurs l'application d'épluchage n'a pas de point fixe.

Toutefois, Thurston a conjecturé déjà dans les années 1970 qu'une variété M^3 irreductible et atoroïdale qui est fibrée en surfaces admet toujours un revêtement fini $\widehat{M}$ contenant une surface incompressible dont le complément n'est pas fibré en intervalles. Si c'est bien le cas, on sait hyperboliser $\widehat{M}$ et ensuite M (cf. [**Ka**]).

L'existence d'une structure hyperbolique complète dans l'intérieur d'une variété fibrée sur le cercle peut paraître paradoxale. Pour l'apprécier, soit M une variété hyperbolique fibrée sur le cercle avec pour fibre une surface compacte S. Considérons une composante quelconque $\widetilde{S}$ de la préimage de la surface S dans le revêtement universel $\mathbb{H}^3$ de M.

(a) $\widetilde{S}$ est une surface proprement plongée et difféomorphe au plan : en effet, c'est le revêtement universel de S.

(b) L'adhérence de $\widetilde{S}$ dans le disque fermé $\mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$ contient toute la sphère à l'infini $\partial\mathbb{H}^3 = \overline{\mathbb{C}}$: cela découle du seul fait que le groupe fondamental $\pi_1(S)$ est un sous-groupe distingué et non trivial de $\pi_1(M)$. Ainsi le plongement de $\widetilde{S}$ dans $\mathbb{H}^3$ est très loin d'être totalement géodésique.

(c) La métrique riemannienne induite sur $\widetilde{S}$ est pourtant quasi-isométrique à celle du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$. En effet, la surface S est difféomorphe à une surface hyperbolique d'après le théorème d'uniformisation; puisque S est compacte, son revêtement universel est donc quasi-isométrique à $\mathbb{H}^2$.

(d) Il existe une translation hyperbolique t dans $\mathbb{H}^3$ telle que $t^n(\widetilde{S})$ est disjointe de $\widetilde{S}$ pour tout entier $n \neq 0$: tout t dans $\pi_1(M) - \pi_1(S)$ convient.

On se rend compte qu'il n'est pas facile de trouver un plongement d'une surface $\widetilde{S}$ dans $\mathbb{H}^3$ qui réunit les propriétés (a)–(d). Le folklore du sujet veut, en fait, qu'ayant constaté ces propriétés apparemment contradictoires, Thurston ait initialement douté de sa conjecture d'hyperbolisation. Mais des exemples émergeaient clairement juste à cet époque.

R. Riley avait montré que le complémentaire dans S^3 d'un voisinage régulier ouvert du noeud de 8 est une variété hyperbolique ([**Ri**] 1975; cf. chapitre 9); le réseau du groupe des isométries de $\mathbb{H}^3$ qui lui correspond est d'indice 2 dans un réseau signalé en 1912 par Gieseking, mais largement oublié entretemps (cf. [**Gi**], [**Mi**]). En 1975, on savait aussi depuis longtemps que le complémentaire du noeud de 8 est une variété fibrée sur le cercle (par exemple, parce que c'est un noeud alterné qui vérifie le critère de Murasugi, voir [**Sta**], [**Go**]). Mais c'est vraisemblablement dans le travail de T. Jorgensen [**Jor**] publié en 1977 que ces deux points de vue apparurent simultanément