

454

ASTÉRISQUE

2024

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2023/2024
EXPOSÉS 1211–1226

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France

Numéro 454.

Comité de rédaction

Marie-Claude ARNAUD	Alexandru OANCEA
Christophe BREUIL	Nicolas RESSAYRE
Eleonora DI NEZZA	Rémi RHODES
Colin GUILLARMOU	Sylvia SERFATY
Alessandra IOZZI	Sug Woo SHIN
Éric MOULINES	
Antoine CHAMBERT-LOIR (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
B.P. 67	P.O. Box 6248
13274 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
christian.smf@cirm-math.fr	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 90€ (\$135)

Abonnement : Europe : 665€; hors Europe : 718€ (\$1 077)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Fax : (33) 01 40 46 90 96
asterisque@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2024

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN : 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)

ISBN : 978-2-37905-206-4

doi : 10.24033/1227

Directrice de la publication : Isabelle Gallagher

Mots clés et classification mathématique

Exposé n° 1211. — groupes réductifs p -adiques, représentations supercuspidales, correspondance de Langlands locale, L -paquets supercuspidaux, filtration de Moy–Prasad, construction de Yu, formules du caractère pour les représentations lisses, représentations supercuspidales régulières et non singulières – 22E50, 11S37, 20G25, 11F70.

Exposé n° 1212. — fonction zêta, fonction L , forme modulaire, forme automorphe, théorie de Hodge p -adique, représentation galoisienne, variété de Shimura, cohomologie complétée, théorème de Fermat, conjecture de Fontaine–Mazur, conjecture de Hasse–Weil, conjecture d’Artin, conjecture de Ramanujan, conjecture de Sato–Tate, conjecture de Breuil–Mézard – 11Fxx.

Exposé n° 1213. — moduli spaces, Higgs bundles, character varieties, non-abelian Hodge theory, perverse filtrations – 14H60, 14D20, 14M35, 14F08.

Exposé n° 1214. — espaces de modules de courbes, courbes tropicales, complexes de graphes – 14H10, 14T20.

Exposé n° 1215. — real enumerative geometry, Gromov–Witten invariants, Welschinger invariants, real symplectic manifolds – 53D45, 14H10, 14N35, 14P99.

Exposé n° 1216. — hyperbolic groups, arithmetic quotients of the ball, right angled reflections groups, intermediate homological finiteness properties, Morse–Lefschetz theory, Bestvina–Brady’s Morse theory – 20F67, 57M60, 57Q70, 22E40.

Exposé n° 1217. — équations d’Einstein, ondes non linéaires, trous noirs – 35Q75.

Exposé n° 1218. — turbulence d’onde, équation de Schrödinger, données aléatoires – 35Q55, 35Q82, 82C10.

Exposé n° 1219. — chaînes de Markov, temps de mélange, cutoff, courbure, varentropie – 60J27.

Exposé n° 1220. — surface minimale, bulle de savon, variété asphérique, courbure scalaire strictement positive, largeur d’Urysohn – 53C20, 53C21, 53C42, 53A10.

Exposé n° 1221. — groupes profinis, groupes discrets, complétion profinie, équivalences entre groupes de type fini, topologie des 3-variétés, rigidité profinie, groupes kleinien – 20E18, 22E40, 57K30, 20H10, 22D50, 53C24.

Exposé n° 1222. — limites de champ moyen, mesures de Gibbs non linéaires, états de Gibbs quantiques – 35Q40, 81V73.

Exposé n° 1223. — livre ouvert, livre brisé, flot de Reeb, orbites périodiques – 53E50, 57K33, 37C27.

Exposé n° 1224. — Euler systems, geometry of Shimura varieties, special values of L -functions, p -adic families of automorphic representations – 11G40, 11G18, 11F80, 11F33.

Exposé n° 1225. — analyse topologique de données, inférence, homologie persistante, topologie algébrique appliquée – 55N31, 62R40, 55U05, 68U05.

Exposé n° 1226. — Mordell–Lang, height inequalities, rational points, uniformity, Abelian varieties – 11G10, 11G30, 11G50 14G05, 14G25.

SÉMINAIRE BOURBAKI

Volume 2023/2024

Exposés 1211–1226

doi : 10.24033/ast.1227

Résumé. — Ce 75^e volume du Séminaire Bourbaki contient les textes des seize exposés présentés pendant l'année 2023/2024 : représentations supercuspidales, prolongement analytique de fonctions L , deux preuves de la conjecture $P = W$, cohomologie des espaces de modules de courbes via la géométrie tropicale, théorie de Gromov–Witten réelle, sous-groupes exotiques de groupes hyperboliques, stabilité des trous noirs, équation cinétique associée à l'équation de Schrödinger, phénomène de coupure pour les chaînes de Markov, variétés à courbure scalaire strictement positive, complétion profinie et topologie des variétés de dimension 3, mesures de Gibbs non linéaires et limites de champ moyen, livres brisés pour des flots de Reeb, construction de nouveaux systèmes d'Euler, modules de persistance et leurs applications, uniformité en géométrie diophantienne.

Abstract. — This 75th volume of the Bourbaki Seminar gathers the texts of the sixteen lectures delivered during the year 2023/2024: supercuspidal representations, analytic continuation of L -functions, two proofs of the $P = W$ conjecture, cohomology of the moduli space of curves via tropical geometry, real Gromov–Witten theory, exotic subgroups of hyperbolic groups, stability of black holes, kinetic equation associated with the Schrödinger equation, cutoff phenomenon for Markov chains, manifolds with positive scalar curvature, profinite completion and topology of 3-manifolds, non-linear Gibbs measures and mean-field limits, broken books for Reeb flows, construction of new Euler systems, persistence modules and their applications, uniformity in diophantine geometry.

TABLE DES MATIÈRES

1211	Alexandre Afgoustidis — Progrès récents sur les représentations supercuspidales	1
1212	Pierre Colmez — Prolongement analytique de fonctions ζ et de fonctions L	53
1213	Victoria Hoskins — Two proofs of the $P = W$ conjecture (after Maulik–Shen, Hausel–Mellit–Minets–Schiffmann).	127
1214	Jérôme Poineau — Cohomologie des espaces de modules de courbes via la géométrie tropicale et les complexes de graphes (d’après M. Chan, S. Galatius et S. Payne)	203
1215	Michele Ancona — Orientability of the moduli space of real maps and real Gromov–Witten theory (after Penka Georgieva and Aleksey Zinger)	261
1216	Olivier Guichard — Exotic subgroups of hyperbolic groups.	303
1217	Cécile Huneau — Stabilité des trous noirs de Schwarzschild et de Kerr . .	319
1218	Anne-Sophie de Suzzoni — Dérivation de l’équation cinétique associée à l’équation de Schrödinger cubique (d’après Yu Deng et Zaher Hani)	341
1219	Anna Ben-Hamou — Phénomène de cutoff pour les chaînes de Markov à courbure positive (d’après J. Salez)	375
1220	Laurent Bessières — μ -bulles et variétés à courbure scalaire strictement positive en dimensions 4 et 5 (d’après O. Chodosh, C. Li et Y. Liokumovich)	393
1221	Bertrand Rémy — Géométrie des groupes et complétion profinie (d’après Martin R. Bridson, Alan Reid,...)	429
1222	Simona Rota Nodari — Mesures de Gibbs non linéaires et limites de champ moyen pour les systèmes quantiques (d’après Lewin, Nam et Rougerie) . .	467
1223	Anna Florio — Livres brisés pour des flots de Reeb en dimension 3 (d’après Colin, Dehornoy et Rechtman)	509
1224	Olivier Fouquet — Constructions of new Euler systems.	555
1225	Grégory Ginot — Un aperçu des modules de persistance et de leurs applications	607
1226	Thomas Scanlon — Uniformity in Diophantine geometry	643

Résumé des exposés

Alexandre Afgoustidis. — *Progrès récents sur les représentations supercuspidales*

Soit G un groupe réductif sur un corps local non archimédien F . Pour les questions de classification des représentations lisses irréductibles de G , l'étude des représentations supercuspidales — celles dont les coefficients matriciels sont à support compact modulo le centre — est en quelque sorte le noyau dur. Les progrès dans cette étude ont été continus depuis cinquante ans. Dans des cas « modérés » où la caractéristique résiduelle de F est suffisamment grande relativement à G , on disposait depuis 2001 d'une construction fort générale de représentations supercuspidales, décrite par J.-K. Yu sur la base de nombreux travaux antérieurs. Mais les avancées récentes ont rendu le tableau beaucoup plus complet et beaucoup plus clair. Par exemple, les travaux de J. Fintzen, T. Kaletha et L. Spice fournissent (dans le cas modéré) une classification des représentations supercuspidales, une formule explicite pour « presque tous » leurs caractères, ainsi qu'une correspondance de Langlands explicite pour les paquets entièrement supercuspidaux. Bien que les constructions s'appuient de façon cruciale sur les représentations de groupes finis et la géométrie des immeubles, les formules de caractère et la description des paquets de Langlands présentent des parallèles saisissants avec le cas des groupes réels.

Pierre Colmez. — *Prolongement analytique de fonctions ζ et de fonctions L*

Les travaux de Wiles sur le théorème de Fermat ont mis en évidence la puissance des méthodes p -adiques pour prouver l'existence de prolongements analytiques de fonctions ζ et L complexes. Ces méthodes se sont considérablement sophistiquées et ont débouché, ces dernières années, sur une moisson de beaux résultats : conjecture de Hasse–Weil pour les courbes de genre 2, holomorphie des fonctions L des puissances symétriques de formes modulaires, etc. Nous présenterons certaines de ces avancées.

Victoria Hoskins. — *Two proofs of the $P = W$ conjecture (after Maulik–Shen, Hausel–Mellit–Minets–Schiffmann)*

The non-abelian Hodge theorem gives a diffeomorphism between the moduli space of Higgs bundles on a smooth projective complex curve and the character variety of (twisted) representations of its fundamental group. The $P = W$ conjecture of de Cataldo, Hausel and Migliorini predicts that via the corresponding isomorphism on cohomology, the perverse filtration for the Hitchin fibration on the Higgs moduli space is identified with the weight filtration of the mixed Hodge structure on the character variety.

We will discuss two recent proofs of the $P = W$ conjecture due to Maulik–Shen and Hausel–Mellit–Minets–Schiffmann. Since the cohomology of the Higgs moduli space is generated by tautological classes (Markman) and their weights on the character variety are known (Shende), the $P = W$ conjecture reduces to describing the interaction between the

tautological classes and the perverse filtration. The proof of Maulik–Shen combines support theorems for meromorphic Hitchin fibrations (after Ngô and Chaudouard–Laumon), vanishing cycle techniques and Yun’s global Springer theory, which allows them to determine the strong perversity of tautological classes by pulling back to a parabolic Higgs moduli space. The proof of Hausel–Mellit–Minets–Schiffmann shows the P - and W -filtrations both agree with a third representation-theoretic filtration for an \mathfrak{sl}_2 -triple in a Lie algebra of polynomial Hamiltonian vector fields, which acts on the cohomology via Hecke operators and cup products by tautological classes.

Jérôme Poineau. — *Cohomologie des espaces de modules de courbes via la géométrie tropicale et les complexes de graphes (d’après M. Chan, S. Galatius et S. Payne)*

Notre connaissance de la cohomologie singulière de l’espace de modules \mathcal{M}_g des courbes lisses de genre g est lacunaire. Pire encore, jusqu’à très récemment, les résultats à notre disposition semblaient pointer dans des directions contradictoires : les groupes de cohomologie de \mathcal{M}_g sont nuls en degré supérieur à $4g - 5$, de dimension au plus exponentielle en \sqrt{g} en degré inférieur à $2g/3$, mais sa caractéristique d’Euler croît plus vite qu’une exponentielle en g . Nous présentons des travaux récents qui permettent d’exhiber de nouveaux exemples de groupes non nuls dans la cohomologie de \mathcal{M}_g , et même certaines familles, pour des degrés de la forme $4g - k$, avec k fixé, dont la dimension présente une croissance au moins exponentielle en g . La démonstration repose sur des liens précis établis entre la cohomologie de l’espace de modules des courbes et celle de variantes de nature combinatoire : espace de modules des courbes tropicales (graphes métriques pondérés) et complexes de graphes de M. Kontsevich.

Michele Ancona. — *Orientability of the moduli space of real maps and real Gromov–Witten theory (after Penka Georgieva and Aleksey Zinger)*

Gromov–Witten invariants are numbers obtained by counting holomorphic curves in a given complex or symplectic manifold. We fix the genus of these curves and the homology class that they realize in the manifold and we impose some constraints (such as passing through a given collection of points) so that the number of such curves is finite. The precise definition of these invariants involves the integration of certain differential forms over a moduli space of holomorphic curves. When we try to define a real analogue of these invariants, we face with a crucial problem: moduli spaces of real holomorphic curves are not orientable in general, and so the integral of these differential forms is not well defined.

The aim of this talk is to introduce the concept of a real-orientable symplectic manifold and to show that moduli spaces of real holomorphic curves in a real-orientable symplectic manifold are always orientable. This leads to a real Gromov–Witten theory and to the definition of a higher genus analogue of the Welschinger invariants.

Olivier Guichard. — *Exotic subgroups of hyperbolic groups*

Gromov hyperbolic groups have remarkable finiteness properties; for example those that are torsion-free are fundamental groups of finite complexes whose universal cover is contractible (property F). In this talk we will show that their subgroups can have exotic finiteness properties: there are hyperbolic groups containing finitely generated subgroups with intermediate finiteness properties (Llosa Isenrich and Py); there are hyperbolic groups containing finitely generated subgroups having the property F but which are not themselves hyperbolic (Italiano, Martelli, and Migliorini). This answers old questions about hyperbolic groups and their subgroups. The two mentioned results come from constructions of fibrations, the first in complex geometry and the second in hyperbolic geometry. We will describe the main points of these constructions.

Cécile Huneau. — *Stabilité des trous noirs de Schwarzschild et de Kerr*

La métrique de Schwarzschild est une solution stationnaire et à symétrie sphérique des équations d'Einstein. Elle a été calculée en 1916, donc un an après la formulation de ces dernières, pour décrire le champ de gravitation créé par un corps sphérique. Ce n'est que bien des années plus tard qu'il a été compris que ces solutions pouvaient être étendues au delà d'une singularité de coordonnées, et que la région intérieure ainsi greffée décrivait un trou noir, région de l'espace-temps où la gravitation est si forte que la lumière elle-même y est piégée. La question fondamentale qui se pose ensuite est de savoir si l'objet trou noir est un artefact des symétries imposées pour calculer la solution, ou quelque-chose de bien réel. La dernière décennie nous a apporté de nombreuses réponses à cette question, à travers des observations physiques, mais aussi à travers des résultats mathématiques de stabilité non linéaire.

Anne-Sophie de Suzzoni. — *Dérivation de l'équation cinétique associée à l'équation de Schrödinger cubique (d'après Yu Deng et Zaher Hani)*

La turbulence d'onde est l'étude de l'évolution de la loi d'une solution d'une équation d'onde lorsque celle-ci a pour donnée initiale une variable aléatoire présentant certaines symétries. Cette loi vérifie une équation d'évolution dite cinétique par analogie avec les équations cinétiques de type Boltzmann. Un des enjeux de la turbulence d'onde est de dériver rigoureusement ces équations cinétiques. L'équation d'onde qu'on considère ici est l'équation de Schrödinger cubique. Dans cet exposé, on commencera par présenter les différents objets de la théorie, en s'appuyant sur l'exemple de l'équation de Schrödinger, puis on donnera une dérivation heuristique, provenant de la littérature physique, de l'équation cinétique associée. Cela permet d'exhiber l'équation cinétique mais la preuve de la dérivation rigoureuse emprunte un autre chemin que celui désigné par la dérivation heuristique. En particulier, la preuve repose sur une décomposition de la solution en arbres ou diagrammes de Feynman déjà présente dans la littérature physique. On présentera cette diagrammatique, la structure générale de la preuve, ainsi que quelques éléments de combinatoire y intervenant.

Anna Ben-Hamou. — *Phénomène de cutoff pour les chaînes de Markov à courbure positive (d'après J. Salez)*

Une chaîne de Markov présente le phénomène de cutoff si sa distance à l'équilibre reste proche de 1 jusqu'à un certain temps, puis chute abruptement vers 0 en un temps bien plus court. Découvert dans les années 1980 dans le contexte des mélanges de cartes, ce phénomène a depuis été observé pour une très grande variété de chaînes. Cependant, le problème de l'identification des mécanismes sous-jacents au cutoff reste une des plus grandes questions dans le domaine des temps de mélange. À cet égard, l'article *Cutoff for non-negatively curved Markov chains* de Justin Salez constitue une avancée majeure. Premièrement, il établit un critère très général pour le cutoff, reposant sur la notion de varentropie, permettant de comprendre le cutoff comme un phénomène de concentration entropique. Deuxièmement, il montre que ce critère est vérifié pour une grande famille de chaînes : les chaînes à courbure positive satisfaisant une condition qui ne concerne que les ordres de grandeur des temps de mélange et de relaxation.

Laurent Bessières. — *μ -bulles et variétés à courbure scalaire strictement positive en dimensions 4 et 5 (d'après O. Chodosh, C. Li et Y. Liokumovich)*

Un problème bien connu en géométrie est de savoir quelles variétés admettent une métrique riemannienne de courbure scalaire strictement positive (PSC). De grandes avancées ont été obtenues dans les années 80 par Schoen–Yau et Gromov–Lawson, avec des techniques de surfaces minimales et de spineurs. Parmi les résultats obtenus dans cette période : une 3-variété compacte admet une métrique PSC si et seulement si sa décomposition en somme connexe n'admet pas de facteur asphérique (i.e. dont les groupes d'homotopie π_i sont nuls pour $i > 1$, ou de manière équivalente de revêtement universel contractile). Modulo la résolution de la conjecture de géométrisation par Perelman, cela revient à dire que la variété est une somme connexe de quotients de S^3 et de $S^2 \times S^1$. En dimension supérieure, les tores T^n n'admettent pas de métrique PSC, ni plus généralement les variétés compactes à courbure sectionnelle négative ou nulle. Ceci a amené à conjecturer qu'une n -variété compacte asphérique n'admettait pas de métrique PSC.

Dans cet exposé je présenterai d'abord une preuve de cette conjecture en dimensions 4 et 5 par Chodosh et Li. Leur démonstration utilise une nouvelle fonctionnelle introduite par M. Gromov, les μ -bulles. Je présenterai ensuite une classification des n -variétés PSC suffisamment connexes en dimensions 4 et 5, obtenue par Chodosh, Li et Liokumovich : un revêtement fini a le type d'homotopie de S^n ou d'une somme connexe de $S^{n-1} \times S^1$.

Bertrand Rémy. — *Géométrie des groupes et complétion profinie (d'après Martin R. Bridson, Alan Reid,...)*

Le contexte général de cet exposé est la question suivante : quels sont les groupes infinis de type fini qui sont caractérisés par la donnée de leurs quotients finis ? La relation d'équivalence associée est celle qui met dans la même classe les groupes possédant le même complété profini. On dit qu'un groupe possède la propriété de rigidité profinie (absolue) s'il est seul dans sa classe d'équivalence, autrement dit si tout groupe infini de type fini de même complété profini est isomorphe à celui-ci. Le problème de mettre en évidence des classes de groupes possédant cette rigidité est encore largement ouvert. On va présenter des constructions de groupes possédant la propriété de rigidité profinie absolue, ainsi que des résultats portant sur une version affaiblie de la rigidité profinie (relative à une classe restreinte de groupes mis en comparaison). Les techniques utilisées relèvent des représentations linéaires, de la géométrie hyperbolique de petite dimension, et d'arguments provenant de l'étude des groupes arithmétiques.

Simona Rota Nodari. — *Mesures de Gibbs non linéaires et limites de champ moyen pour les systèmes quantiques (d'après Lewin, Nam et Rougerie)*

Dans une série de travaux récents, Lewin, Nam et Rougerie ont établi un lien rigoureux entre certaines mesures de Gibbs non linéaires classiques et certains états de Gibbs quantiques. Plus précisément, ils ont prouvé que les mesures de Gibbs non linéaires peuvent être obtenues à partir des états de Gibbs grand-canoniques du problème à N corps, dans une limite de champ moyen où la température T diverge et la constante de couplage tend vers zéro comme $1/T$. Les cas bidimensionnel et tridimensionnel sont particulièrement difficiles en raison de la nécessité d'utiliser une procédure de renormalisation pour traiter l'émergence d'objets singuliers.

Anna Florio. — *Livres brisés pour des flots de Reeb en dimension 3 (d'après Colin, Dehornoy et Rechtman)*

Étant donnée une variété de contact (M, ζ) il existe plusieurs formes de contact α définissant la même structure de contact ζ . Le choix d'une telle forme α induit une dynamique sur M , grâce au champ de Reeb R_α et au flot de Reeb associés. Pour une variété fermée orientée de dimension 3, Vincent Colin, Pierre Dehornoy et Ana Rechtman ont montré que chaque flot de Reeb non dégénéré est porté par un livre brisé, une généralisation de la notion de livre ouvert. Plus précisément, il existe un couple (K, F) où K est une réunion finie d'orbites périodiques du flot et F est un certain feuilletage co-orienté de $M \setminus K$ tel que la compactification de chaque feuille est une surface dont l'intérieur est plongé et positivement transverse au flot et dont le bord est contenu dans K . Nous définirons une telle décomposition en livre brisé et expliquerons sa construction, qui repose sur la théorie de l'homologie de contact plongée (ECH) et

la chirurgie de Fried pour des surfaces. L'existence de tels livres brisés a des conséquences dynamiques remarquables, notamment sur le nombre d'orbites périodiques et sur l'entropie topologique des flots de Reeb portés par une telle décomposition, ou encore sur l'existence d'une section de Birkhoff pour un flot de Reeb générique. Nous discuterons de telles applications, en faisant référence aussi aux travaux de Colin–Dehornoy–Hryniewicz–Rechtman et Contreras–Mazzucchelli.

Olivier Fouquet. — *Constructions of new Euler systems*

The method of Euler systems is a technique for bounding Selmer groups of p -adic Galois representations in terms of cohomology classes which form an algebraic analogue of L -functions. Since the initial works of V. Kolyvagin, K. Rubin and K. Kato, which consist in the cases of the multiplicative group and of GL_2 , it has developed spectacularly in various directions: extensions of Euler systems into universal families, constructions of Euler systems for many other reductive groups (Rankin–Selberg products of automorphic representations, GSp_4, \dots), the method of level-raising congruences and bipartite systems, refined applications in Iwasawa theory... We will present some of these advances.

Grégory Ginot. — *Un aperçu des modules de persistance et de leurs applications*

L'homologie persistante s'est imposée comme un outil important en analyse topologique des données et a trouvé des applications nombreuses dans d'autres sciences mais aussi de plus en plus en mathématiques. Son développement s'est fait autour de l'idée de chercher un invariant calculable associé à une discrétisation d'un espace topologique suffisamment régulier. La structure qui décrit ces invariants est précisément celle d'un module de persistance. Dans l'exposé nous présenterons le théorème de structure de ces objets, qui exprime qu'ils sont encodés par des « codes barres » et les théorèmes de stabilité qui permettent de contrôler la différence entre les invariants d'un espace et ceux d'une approximation.

Puis nous expliciterons des problématiques actuelles que sont le cas de la persistance multi-paramétrique et la question centrale de l'information géométrique contenue dans les codes barres. Nous illustrerons les résultats présentés par des exemples d'applications intra- ou extra-mathématique.

Thomas Scanlon. — *Uniformity in Diophantine geometry*

The Mordell conjecture, famously proven by Faltings, that an algebraic curve of genus greater than one has only finitely many rational points admits a geometric reformulation which then naturally generalizes to higher dimensional varieties giving the Mordell–Lang conjecture: if A is an abelian variety over the complex numbers, $\Gamma \leq A(\mathbb{C})$ is a finite rank subgroup, and $X \subseteq A$ is an algebraic subvariety, then $\Gamma \cap X(\mathbb{C})$ is a finite union of cosets of subgroups of Γ . The Mordell–Lang conjecture and related conjectures, such as the Manin–Mumford and Bogomolov conjectures, were

proven already in the 1980s and 1990s and then the problem shifted to that of finding more effective descriptions and bounds for the intersections $\Gamma \cap X(\mathbb{C})$. Earlier work of such people as Bombieri, Faltings, Mumford, Rémond, Vojta, Ullmo, and Zhang, amongst others, has produced some effective bounds that depend on the arithmetic of the problem, usually formulated in terms of various heights. The main theorems discussed in this lecture give bounds depending entirely on geometric data, such as the dimensions and degrees of X and A and the rank of Γ . Interestingly, the new results are based on refinements of the arithmetic height inequalities already appearing in the earlier work together with a study of the so-called Betti map which takes into account the real analytic geometry of universal families of abelian varieties. This is a report on work of several mathematicians including, but not limited to, Cantat, Dimitrov, Gao, Ge, Habegger, Kühne, Masser, Xie, Yuan, Zannier, and Zhang.