438

ASTÉRISQUE

2022

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2021/2022
EXPOSÉS 1181–1196

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France
Numéro 438.

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 9
France
christian.smf@cirm-math.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 80€ ($ 120)
Abonnement : Europe : 665€; hors Europe : 718€ ($1 077)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Fax : (33) 01 40 46 90 96
asterisque@smf.emath.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN : 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)
ISBN : 978-2-85629-968-5
doi : 10.24033/ast.1181

Directeur de la publication : Fabien Durand

438

ASTÉRISQUE

2022

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2021/2022
EXPOSÉS 1181–1196

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki
Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre-et-Marie-Curie
75231 Paris Cedex 05 (France) https://www.bourbaki.fr

Mots clés et classification mathématique

Exposé nº 1181. — Réseaux des groupes de Lie semi-simples, groupes de surface, représentations anosoviennes, représentations quasi-fuchsiennes – 20E07, 20H10, 22E40 (14M15, 28C10, 37A25).

Exposé nº 1182. — Conjecture de Mordell, conjecture de Lang–Vojta, application de périodes, connexion de Gauss–Manin, équations diophantiennes – 11G30, 11G10, 12H25, 14D05.

Exposé nº 1183. — Conjecture de Smale généralisée, flot de Ricci, variétés de dimension 3 – 53C21, 53E20, 57S05.

Exposé nº 1184. — Courbure de Ricci, convergence de Gromov–Hausdorff, régularité, stratification, rectifiabilité – 53B20, 53C21, 53C23, 35A21.

Exposé nº 1185. — Joinings, measure rigidity, equidistribution – 22E40 (22D40, 37A05, 37A45, 11H55).

Exposé nº 1186. — Model theory, valued fields, the independence property – 03C45, 03C60, 12L12, 12J99.

Exposé nº 1187. — Expander graphs, high-dimensional expanders, Ramanujan complexes, topological overlap property – 05E45.

Exposé nº 1188. — Average distortion embedding, nonlinear spectral gap, John's theorem, expander graph – 30L05.

Exposé nº 1189. — Nonpositive curvature, Anosov geodesic flow, marked length spectrum, local rigidity, micro-local analysis, inversion of the generator of the geodesic flow, pseudo-differential operators, resolvent estimates – 53C24, 37C27.

Exposé nº 1190. — L-functions, automorphic forms, Lindelöf conjecture, the subconvexity problem, amplification, the orbit method – 11F03, 11F66, 17B08.

Exposé nº 1191. — Compressible Navier–Stokes and Euler equations, energy supercritical defocusing nonlinear Schrödinger equation, formation of singularities, self-similar profiles – 35Q30, 35Q31, 35Q55.

Exposé nº 1192. — Isoperimetrie, convexité en grande dimension, conjecture de Kannan–Lovász–Simonovits, localisation stochastique – 52A23.

Exposé n° 1193. — Function field arithmetic, analytic number theory, binary additive problems, exponential sums over finite fields, étale cohomology – 11N05, 11N32, 11L07, 11T55, 14F20.

Exposé n° 1194. — Tranformée de Fourier, mesure atomique, empilement de sphères – 42A16, 52C17, 52C23.

Exposé n° 1195. — Conjecture du $K(\pi, 1)$, arrangements d'hyperplans, groupes de Coxeter affines, groupes d'Artin, structures de Garside, décortiquabilité d'ensembles ordonnés – 20F36, 20F55, 55P20.

Exposé n° 1196. — Three-term arithmetic progressions, Roth's theorem – 11B30.

SÉMINAIRE BOURBAKI

Volume 2021/2022
Exposés 1181—1196
doi : 10.24033.ast/1181

Résumé. — Ce 73^{e} volume du Séminaire Bourbaki contient les textes des seize exposés présentés pendant l'année 2021/2022 : groupes de surface dans les réseaux des groupes de Lie, non-densité des points entiers et variations de structures de Hodge, flots de Ricci et difféomorphismes de variétés de dimension 3, structure des espaces limites des variétés non effondrées, classification des couplages invariants, conjecture de Shelah et théorème de Johnson, graphes expanseurs en dimension supérieure, trous spectraux non linéaires et applications, rigidité locale du spectre des longueurs marquées, problème de sous-convexité pour les fonctions L, équation de Schrödinger non linéaire, conjecture de Kannan–Lovász–Simonovits, problèmes additifs binaires pour les polynômes sur les corps finis, mesures cristallines, conjecture du $K(\pi, 1)$ pour les groupes d'Artin affines, ensembles sans progression arithmétique de longueur 3.

Abstract. — This 73rd volume of the Bourbaki Seminar gathers the texts of the sixteen lectures delivered during the year 2021/2022: surface groups in lattices of Lie groups, non-density of integral points and variations of Hodge structures, Ricci flow and diffeomorphisms of 3-manifolds, structure of limit spaces of non-collapsed manifolds, classification of joinings, Shelah's conjecture and Johnson's theorem, high-dimensional expander graphs, non-linear spectral gaps and applications, local marked length spectrum rigidity, subconvexity problem for L-functions, non-linear Schrödinger equation, Kannan–Lovász–Simonovits's conjecture, binary additive problems over finite fields, crystalline measures, $K(\pi, 1)$ conjecture for affine Artin groups, sets with no three terms in arithmetic progression.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 2022

TABLE DES MATIÈRES

Résumé des exposés

Fanny Kassel. — *Groupes de surface dans les réseaux des groupes de Lie semi-simples* (*d'après J. Kahn, V. Marković, U. Hamenstädt, F. Labourie et S. Mozes*)
Un réseau cocompact d'un groupe de Lie semi-simple G est un sous-groupe discret Γ tel que le quotient G/Γ soit compact. Un tel réseau contient-il toujours un sous-groupe de surface, à savoir un sous-groupe isomorphe au groupe fondamental d'une surface hyperbolique compacte ? Si oui, contient-il des sous-groupes de surface qui soient proches (dans un sens quantitatif précis) de sous-groupes fuchsiens de G, c'est-à-dire de sous-groupes discrets de G contenus dans une copie de $(\mathrm{P})\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ dans G ?

Le cas du groupe $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbf{C})$ correspond à une fameuse conjecture de Thurston sur les variétés hyperboliques de dimension 3, et la version quantitative dans le cas $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbf{R}) \times \mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ implique une conjecture d'Ehrenpreis sur les paires de surfaces hyperboliques compactes ; ces deux conjectures ont été démontrées par Kahn et Marković il y a une dizaine d'années. Motivée par une question de Gromov, Hamenstädt a résolu le cas où G est de rang réel un à l'exception de $G = \mathrm{SO}(2n,1)$. Dans une prépublication récente, Kahn, Labourie et Mozes traitent le cas d'une large classe de groupes semi-simples G, incluant notamment tous les groupes de Lie simples complexes ; les groupes de surface qu'ils obtiennent sont des images de représentations anosoviennes au sens de Labourie. Nous donnerons quelques idées de leur démonstration.

Marco Maculan. — *Non-densité des points entiers et variations de structures de Hodge* (*d'après B. Lawrence, W. Sawin et A. Venkatesh*)
Au début des années 80, Faltings a montré que toute courbe projective non singulière de genre au moins 2 définie sur un corps de nombres K n'admet qu'un nombre fini de points à coordonnées dans K — un énoncé conjecturé auparavant par Mordell. Récemment, Lawrence et Venkatesh ont découvert une nouvelle méthode pour prouver que les points entiers d'une variété algébrique définie sur un corps de nombres ne sont pas denses pour la topologie de Zariski. Appliquée aux courbes, cette technique fournit une nouvelle démonstration de la conjecture de Mordell ; appliquée aux variétés paramétrant les hypersurfaces non singulières de l'espace projectif (Lawrence–Venkatesh) ou d'une variété abélienne (Lawrence–Sawin), elle conduit à des résultats de finitude inaccessibles par les méthodes précédentes.

Sylvain Maillot. — *Flot de Ricci et difféomorphismes de variétés de dimension* 3 (*d'après R. Bamler et B. Kleiner*)
R. Bamler et B. Kleiner démontrent que si M est une variété de dimension 3 compacte admettant une métrique riemannienne à courbure constante strictement positive, alors l'injection canonique du groupe d'isométries de cette métrique dans le

groupe de difféomorphismes de M est une équivalence d'homotopie. Leur méthode est basée sur la notion de flot de Ricci singulier développée par B. Kleiner et J. Lott, et donne une nouvelle preuve de la conjecture de Smale, démontrée par Hatcher en 1983, dans le cas de S^3. Elle permet également de prouver que l'espace des métriques à courbure scalaire strictement positive sur une variété de dimension 3 compacte est vide ou contractile, ce qui améliore un résultat obtenu par F. Coda Marques en 2012.

Ilaria Mondello. — *Structure des espaces limites des variétés non effondrées à courbure de Ricci minorée* (*d'après J. Cheeger, W. Jiang et A. Naber*)
Grâce au célèbre théorème de pré-compacité démontré par Gromov en 1981, nous savons que toute suite de variétés à courbure de Ricci minorée possède une sous-suite convergente vers un espace métrique en topologie de Gromov-Hausdorff pointée. Depuis lors, de nombreux mathématiciens, Anderson, Bando, Kasue, Nakajima, Cheeger, Colding, Tian, ont exploré la structure de cet espace limite, en particulier dans le cas de variétés à courbure de Ricci bornée, non effondrées, c'est-à-dire dont le volume de la boule unitaire est uniformément minoré. Les récents travaux de Cheeger, Jiang et Naber ont permis des avancées significatives dans la compréhension de la géométrie des espaces limites non effondrés. Ils ont ainsi démontré que, pour une suite de variétés à courbure de Ricci bornée, et sans hypothèse supplémentaire sur la courbure de Riemann, le lieu singulier est de codimension au moins quatre et de mesure d'Hausdorff correspondante localement finie (conjecture de la codimension quatre). Pour une suite de variétés dont la courbure de Ricci est seulement minorée, ils ont prouvé la rectifiabilité du lieu singulier et l'unicité presque partout des cônes tangents, ce qui améliore grandement les résultats connus sur les singularités de l'espace limite.

Menny Aka. — *Joinings classification and applications* (*after Einsiedler and Lindenstrauss*)
This talk surveys the classification of joinings of higher-rank torus actions on S-arithmetic quotients of semisimple or perfect algebraic groups and some of its applications. This classification was proved by Einsiedler and Lindenstrauss (Duke Mathematical Journal 2007, Publications mathématiques de l'IHÉS, 2019). It establishes that ergodic joinings must be algebraic, and in particular that such torus actions in many cases must be disjoint, that is, they admit only the trivial joining which is the product of the Haar measures on each of the factors.

Their proof is based on entropy methods, developed by Einsiedler, Katok, Lindenstrauss and Spatzier. We will describe these methods and give some ideas on how they fit into the scheme of their proof. Specifically, we will explain how to prove disjointness when the associated algebraic groups have a different root structure. This already allows for some applications, which will be presented at the end of the talk.

Sylvy Anscombe. — *Shelah's Conjecture and Johnson's Theorem* (*after Will Johnson*)
The "Shelah Conjecture" proposes a description of fields whose first-order theories are without the Independence Property (IP): they are finite, separably closed, real closed, or admit a non-trivial henselian valuation. One of the most prominent dividing lines in the contemporary model-theoretic universe, IP holds in a theory if there is a formula that can define arbitrary subsets of arbitrarily large finite sets. In 2020, Johnson gave a proof of the conjecture in an important case; namely, the case of dp-finite (roughly: finite dimensional) theories of fields. Combined with a result of Halevi–Hasson–Jahnke, Johnson's Theorem completely classifies the dp-finite theories of fields.

We will explain this classification, describe some ingredients of the proof, and explore how Johnson's Theorem and the Shelah Conjecture fit into the bigger picture.

Uli Wagner. — *High-Dimensional Expanders* (*after Gromov, Kaufman, Kazhdan, Lubotzky, and others*)
Expander graphs (sparse but highly connected graphs) have, since their inception, been the source of deep links between Mathematics and Computer Science as well as applications to other areas. In recent years, a fascinating theory of high-dimensional expanders has begun to emerge, which is still in a formative stage but has nonetheless already lead to a number of striking results. Unlike for graphs, in higher dimensions there is a rich array of non-equivalent notions of expansion (coboundary expansion, cosystolic expansion, topological expansion, spectral expansion, etc.), with differents strengths and applications. In this talk, we will survey this landscape of high-dimensional expansion, with a focus on two main results. First, we will present Gromov's Topological Overlap Theorem, which asserts that coboundary expansion (a quantitative version of vanishing mod 2 cohomology) implies topological expansion (roughly, the property that for every map from a simplicial complex to a manifold of the same dimension, the images of a positive fraction of the simplices have a point in common). Second, we will outline a construction of bounded degree 2-dimensional topological expanders, due to Kaufman, Kazhdan, and Lubotzky.

Alexandros Eskenazis. — *Average distortion embeddings, nonlinear spectral gaps, and a metric John theorem* (*after Assaf Naor*)
In this lecture we shall discuss some geometric applications of the theory of nonlinear spectral gaps. Most notably, we will present a proof of a deep theorem of Naor asserting that for any norm $\|\cdot\|$ on $\mathbf{R}^d$, the metric space $(\mathbf{R}^d, \sqrt{\|x-y\|})$ embeds into Hilbert space with quadratic average distortion $O(\sqrt{\log d})$. As a consequence, we will deduce that any n-vertex expander graph does not admit a $O(1)$-average distortion embedding into any $n^{o(1)}$-dimensional normed space.

Ursula Hamenstädt. — *Local marked length spectrum rigidity* (*after Colin Guillarmou and Thibault Lefeuvre*)
The marked length spectrum rigidity question asks whether two closed negatively curved manifolds M and N are isometric if they are homeomorphic with a homeomorphism which maps a closed geodesic on M to a curve on N which is freely homotopic to a closed geodesic of the same length. The lecture discusses the work of Guillarmou and Lefeuvre who used novel tools from microlocal analysis to give an affirmative answer to a local version of this question.

Philippe Michel. — *Recent progress on the subconvexity problem*
The subconvexity problem aims at providing non-trivial (ie. subconvex) bounds for central values of automorphic L-functions; the main conjecture in this area is the Generalized Lindelöf Hypothesis which itself is a consequence of the Generalized Riemann Hypothesis. This lecture will survey several advances that have been made on this question during the past ten years : these include the delta-symbol approach of R. Munshi, the Weyl type bounds of I. Petrow and M. Young (both use the Dirichlet L-series representation of the central values) and the work of P. Nelson and A. Venkatesh (who use the automorphic period representations for the central value).

Galina Perelman. — *Finite time blow up for the compressible fluids and for the energy supercritical defocusing nonlinear Schrödinger equation* (*after Frank Merle, Pierre Raphaël, Igor Rodnianski and Jérémie Szeftel*)
This talk addresses the problem of singularity formation in solutions of the 3D compressible barotropic Navier–Stokes equation and of the energy supercritical defocusing nonlinear Schrödinger equation. I will explain the recent results of F. Merle, P. Raphaël, I. Rodnianski, and J. Szeftel that link this problem to the compressible Euler dynamics showing that in some range of parameters both models admit finite time blow up solutions governed by appropriate self-similar solutions of the underlying Euler equation. While for the compressible Navier–Stokes equation the existence of finite time blow up solutions was already known, for the nonlinear Schrödinger equation this is the first result of formation of singularities in the defocusing case.

Guillaume Aubrun. — *Vers la conjecture de Kannan–Lovász–Simonovits* (*d'après Yuansi Chen*)
Comment couper un ensemble convexe de $\mathbf{R}^n$ en deux parties de même volume en minimisant la surface de coupe ? Pour ce problème isopérimétrique, Kannan, Lovász et Simonovits ont conjecturé en 1995 que si l'on restreint l'infimum aux coupes le long d'un hyperplan, la valeur obtenue n'est modifiée que par une constante indépendante de la dimension. Cette conjecture a de nombreuses implications sur la géométrie des convexes de grande dimension.