Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

GROUPE MIRABOLIQUE, STRATIFICATION DE NEWTON RAFFINÉE ET COHOMOLOGIE DES ESPACES DE LUBIN-TATE

Pascal Boyer

Tome 148
Fascicule 1

2020

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

pages 1-23

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 148, mars 2020

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`commandes@smf.emath.fr`

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement électronique : 135 € ($ 202),
avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Bulletin de la SMF

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 1 44 27 67 99 • Fax : (33) 1 40 46 90 96
`bulletin@smf.emath.fr` • `smf.emath.fr`

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

Bull. Soc. Math. France
148 (1), 2020, p. 1-23

GROUPE MIRABOLIQUE, STRATIFICATION DE NEWTON RAFFINÉE ET COHOMOLOGIE DES ESPACES DE LUBIN-TATE

par Pascal Boyer

Résumé. — Dans [2], on détermine les groupes de cohomologie des espaces de Lubin-Tate par voie globale en calculant les fibres des faisceaux de cohomologie du faisceau pervers des cycles évanescents Ψ d'une variété de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor. L'ingrédient le plus complexe consiste à contrôler les flèches de deux suites spectrales calculant l'une les faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor, et l'autre ceux de Ψ. Dans cet article, nous contournons ces difficultés en utilisant la théorie classique des représentations du groupe mirabolique ainsi qu'un argument géométrique simple.

Abstract (*Mirabolic group, ramified Newton stratification and cohomology of Lubin-Tate spaces*). — In [2], we determine the cohomology of Lubin-Tate spaces globally using the comparison theorem of Berkovich by computing the fibers at supersingular points of the perverse sheaf of vanishing cycle Ψ of some Shimura variety of Kottwitz-Harris-Taylor type. The most difficult argument deals with the control of maps of the spectral sequences computing the sheaf cohomology of both Harris-Taylor perverse sheaves and those of Ψ. In this paper, we bypass these difficulties using the classical theory of representations of the mirabolic group and a simple geometric argument.

Texte reçu le 8 novembre 2016, modifié le 15 novembre 2018, accepté le 4 avril 2019.

Pascal Boyer, Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539, F-93430, Villetaneuse, France • *E-mail :* `boyer@math.univ-paris13.fr`

Classification mathématique par sujets (2010). — 11F70, 11F80, 11F85, 11G18, 20C08.

Mots clefs. — Variétés de Shimura, Cohomologie de torsion, Idéal maximal de l'algèbre de Hecke, Localisation de la cohomologie, Représentation galoisienne.

L'auteur remercie l'ANR pour son soutien dans le cadre du projet PerCoLaTor 14-CE25.

doi:10.24033/bsmf.2797

1. Introduction

Le résultat principal de [2] est la détermination de chacun des groupes de cohomologie à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$, de la tour de Lubin-Tate. En utilisant le théorème de comparaison de Berkovich, la démonstration est de nature globale et consiste à calculer les germes en un point supersingulier des faisceaux de cohomologie du complexe des cycles évanescents $\Psi_{\mathcal{I}}$ en une place v d'un corps CM, F, d'une tour de variétés de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor $X_{\mathcal{I}}$ indexée par l'ensemble $\mathcal{I}$ de ses niveaux. La preuve se déroule alors en deux temps relativement distincts :

- Les auteurs de [5] associent à une représentation irréductible ρ_v du groupe des inversibles $D_{v,h}^\times$ de l'algèbre à division centrale sur F_v d'invariant $1/h$, un système local $\mathcal{L}(\rho_v)$, dit d'Harris-Taylor, sur la strate de Newton $X^{=h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v}$ de la fibre spéciale en v de $X_{\mathcal{I}}$ et calculent la somme alternée de leurs groupes de cohomologies à support compact. Dans [2] on exploite ce calcul en exprimant les images des faisceaux pervers ${}^p j^{=h}_! \mathcal{L}(\rho_v)[d-h]$ et $\Psi_{\mathcal{I}}$ dans un groupe de Grothendieck de faisceaux pervers équivariants, en termes d'extensions intermédiaires de systèmes locaux d'Harris-Taylor sur les différentes strates de Newton. Il s'agit de la partie la plus simple de loc. cit., celle qui est contrôlée par la formule des traces.
- Dans un deuxième temps, on étudie les suites spectrales associées à la filtration par les poids de ces deux faisceaux pervers pour calculer les faisceaux de cohomologie de ${}^p j^{=h}_{!*} \mathcal{L}(\rho_v)[d-h]$ et ceux de $\Psi_{\mathcal{I}}$. La partie la plus complexe de [2] consiste à contrôler les flèches de ces suites spectrales et au final, montrer « qu'elles sont le moins triviales possibles », au sens où dès que la source et le but d'une telle flèche partagent un sous-faisceau équivariant, cette flèche induit un isomorphisme sur ceux-ci.

Pour montrer ce fait, dans [2], on utilise une propriété de compatibilité à l'involution de Zelevinsky de la cohomologie des espaces de Lubin-Tate. Dans [3], on propose une autre démonstration plus simple conceptuellement mais aussi très lourde, reposant sur des calculs de groupes de cohomologie globaux et en utilisant le théorème de Lefschetz vache.

Ces deux preuves sont techniquement difficiles et ne permettent pas de réellement comprendre la raison profonde de la non trivialité de ces flèches. Le but premier de cet article est ainsi de proposer une nouvelle preuve simple et en un sens, naturelle. Plus précisément à partir de la première étape mentionnée ci-avant, nous utilisons tout d'abord, avec les notations du paragraphe suivant, le fait que l'inclusion

$$X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}} \setminus X^{\geq h+1}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_{h+1}}} \hookrightarrow X^{\geq h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}$$

est affine, cf. le lemme 5.2. Ensuite de la théorie classique des représentations induites du groupe mirabolique, rappelée au partie 4, on obtient, cf. les suites exactes courtes (6) et (7), une filtration, à deux crans, des faisceaux pervers d'Harris-Taylor, fournissant une suite spectrale qui dégénère en E_1 et qui correspond au terme $E_2 = E_\infty$ de la suite spectrale de [2]. Autrement dit la détermination des flèches dans [2] est entièrement contrôlée par l'affinité de l'inclusion ci-dessus et la théorie des représentations du groupe mirabolique. Le même procédé appliqué au faisceau pervers des cycles évanescents fournit de la même façon, cf. la proposition 7.1, une filtration de celui-ci, dont la suite spectrale calculant ses faisceaux de cohomologie dégénère en E_1, cf. le corollaire 7.2, et coïncide avec le terme $E_2 = E_\infty$ de la suite spectrale de [2].

Je remercie profondément J.-F. Dat pour l'intérêt qu'il porte à mon travail, ses questions et ses suggestions qui ont sérieusement contribué à l'amélioration du texte.

2. Géométrie des variétés de Shimura unitaires simples

Soit $F = F^+E$ un corps CM avec $E/\mathbb{Q}$ quadratique imaginaire, dont on fixe un plongement réel $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$. Pour v une place de F, on notera

- F_v le complété du localisé de F en v,
- $\mathcal{O}_v$ l'anneau des entiers de F_v,
- ϖ_v une uniformisante et
- q_v le cardinal du corps résiduel $\kappa(v) = \mathcal{O}_v/(\varpi_v)$.

Soit B une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2 telle qu'en toute place x de F, B_x est soit décomposée soit une algèbre à division et on suppose B munie d'une involution de seconde espèce $*$ telle que $*_{|F}$ est la conjugaison complexe c. Pour $\beta \in B^{*=-1}$, on note $\sharp_\beta$ l'involution $x \mapsto x^{\sharp_\beta} = \beta x^* \beta^{-1}$ et $G/\mathbb{Q}$ le groupe de similitudes défini pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R par

$$G(R) \simeq \{(\lambda, g) \in R^\times \times (B^{op} \otimes_\mathbb{Q} R)^\times \text{ tel que } gg^{\sharp_\beta} = \lambda\}$$

avec $B^{op} = B \otimes_{F,c} F$. Si x est une place de $\mathbb{Q}$ décomposée $x = yy^c$ dans E alors

$$G(\mathbb{Q}_x) \simeq (B_y^{op})^\times \times \mathbb{Q}_x^\times \simeq \mathbb{Q}_x^\times \times \prod_{z_i} (B_{z_i}^{op})^\times, \tag{1}$$

où, en identifiant les places de F^+ au dessus de x avec les places de F au dessus de y, $x = \prod_i z_i$ dans F^+.

Dans [5], les auteurs justifient l'existence d'un G comme ci-dessus tel qu'en outre :

- si x est une place de $\mathbb{Q}$ qui n'est pas décomposée dans E alors $G(\mathbb{Q}_x)$ est quasi-déployé ;
- les invariants de $G(\mathbb{R})$ sont $(1, d-1)$ pour le plongement τ et $(0, d)$ pour les autres.

Notation 2.1. — On fixe un nombre premier l non ramifié dans E et on note Spl l'ensemble des places v de F telles que $p_v := v_{|\mathbb{Q}} \neq l$ est décomposé dans F et $B_v^\times \simeq GL_d(F_v)$.

Rappelons, cf. [5] bas de la page 90, qu'un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}^\infty)$ est dit « assez petit » s'il existe une place x pour laquelle la projection de U^v sur $G(\mathbb{Q}_x)$ ne contienne aucun élément d'ordre fini autre que l'identité.

Notation 2.2. — Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts « assez petits » de $G(\mathbb{A}^\infty)$. Pour $I \in \mathcal{I}$, on note $X_{I,\eta} \longrightarrow \operatorname{Spec} F$ la variété de Shimura associée, dit de Kottwitz-Harris-Taylor.

Remarque. — Pour tout $v \in$ Spl, la variété $X_{I,\eta}$ admet un modèle projectif $X_{I,v}$ sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_v$ de fibre spéciale X_{I,s_v}. Pour I décrivant $\mathcal{I}$, le système projectif $(X_{I,v})_{I\in\mathcal{I}}$ est naturellement muni d'une action de $G(\mathbb{A}^\infty) \times \mathbb{Z}$ telle que l'action d'un élément w_v du groupe de Weil W_v de F_v est donnée par celle de $-\deg(w_v) \in \mathbb{Z}$, où $\deg = \operatorname{val} \circ \operatorname{Art}^{-1}$ où $\operatorname{Art}^{-1} : W_v^{ab} \simeq F_v^\times$ est l'isomorphisme d'Artin qui envoie les Frobenius géométriques sur les uniformisantes.

Notations 2.3. — (cf. [2] §1.3) Pour $I \in \mathcal{I}$, la fibre spéciale géométrique $X_{I,\bar{s}_v}$ admet une stratification de Newton

$$X_{I,\bar{s}_v} =: X_{I,\bar{s}_v}^{\geq 1} \supset X_{I,\bar{s}_v}^{\geq 2} \supset \cdots \supset X_{I,\bar{s}_v}^{\geq d}$$

où $X_{I,\bar{s}_v}^{=h} := X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h} - X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h+1}$ est un schéma affine, lisse de pure dimension $d-h$ formé des points géométriques dont la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate est de rang h. Pour tout $1 \leq h < d$, nous utiliserons les notations suivantes :

$$i^h : X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h} \hookrightarrow X_{I,\bar{s}_v}, \quad j^{\geq h} : X_{I,\bar{s}_v}^{=h} \hookrightarrow X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h},$$

ainsi que $j^{=h} = i^h \circ j^{\geq h}$.

Soit $\mathcal{G}(h)$ le groupe de Barsotti-Tate universel sur $X_{I,\bar{s},\overline{1_h}}^{=h}$:

$$0 \to \mathcal{G}(h)^c \longrightarrow \mathcal{G}(h) \longrightarrow \mathcal{G}(h)^{et} \to 0$$

où $\mathcal{G}(h)^c$ (resp. $\mathcal{G}(h)^{et}$) est connexe (resp. étale) de dimension h (resp. $d-h$). Notons $\iota_{m_1} : (\mathcal{P}_v^{-m_1}/\mathcal{O}_v)^d \longrightarrow \mathcal{G}(h)[p^{m_1}]$ la structure de niveau universelle. Notons alors $(e_i(m_1))_{1\leq i\leq d}$ la base canonique de $(\mathcal{P}_v^{-m_1}/\mathcal{O}_v)^d$.

Définition 2.4. — On introduit le sous-schéma fermé $X_{I,\bar{s},\overline{1_h}}^{=h}$ de $X_{I,\bar{s}_v}^{=h}$ défini par la propriété que $\big\{\iota_{m_1}(e_i(m_1)) : \ 1 \leq i \leq h\big\}$ forme une base de Drinfeld de $\mathcal{G}(h)^c[p^{m_1}]$.

Plus généralement étant donné $a \in GL_d(\mathcal{O}_v)/P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v)$ que l'on identifiera avec le sous-espace vectoriel $\langle a(e_1), \dots, a(e_h)\rangle$ engendré par les images par a des h premiers vecteurs $e_1, \dots, e_h$ de la base canonique de $\mathcal{O}_v^d$, on définit la strate *dite pure*[1] $X^{=h}_{I,\bar{s},a}$ comme le sous-schéma fermé tel que $\{\iota_{m_1}(a(e_i(m_1)) : 1 \leq i \leq h\}$ forme une base de Drinfeld de $\mathcal{G}(h)^c[p^{m_1}]$, où $e_i(m_1)$ est l'image de e_i modulo $\mathcal{P}_v^{m_1}$.

Remarque. — L'action de $GL_d(F_v)$ sur $X^{=h}_{I,\bar{s}_v}$ donne la décomposition

$$X^{=h}_{I,\bar{s}_v} \simeq X^{=h}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}} \times_{P_{h,d}(\mathcal{O}_v/(\varpi_v^n))} GL_d(\mathcal{O}_v/(\varpi_v^n)), \tag{2}$$

au sens où la strate $X^{=h}_{I,\bar{s}_v,a}$ s'obtient comme l'image par a de $X^{=h}_{I,\bar{s},\overline{1_h}}$.

Notation 2.5. — On note $X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}}$ l'adhérence de $X^{=h}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}}$ dans $X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v}$ et

$$j^{\geq h}_{\overline{1_h}} : X^{=h}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}} \hookrightarrow X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}},$$

ainsi que $j^{=h}_{\overline{1_h}} := i^h_{\overline{1_h}} \circ j^{\geq h}_{\overline{1_h}}$ où $i^h_{\overline{1_h}} : X^{\geq h}_{I,\bar{s}_v,\overline{1_h}} \hookrightarrow X_{I,\bar{s}_v}$.

3. Faisceaux pervers d'Harris-Taylor et des cycles évanescents

Fixons une place $v \in \mathrm{Spl}$. En utilisant un analogue des classiques variétés d'Igusa, les auteurs de [5] associent à toute représentation ρ_v de l'ordre maximal $\mathcal{D}^\times_{v,h}$ de $D^\times_{v,h}$, un système local $\mathcal{L}(\rho_v)_{\overline{1_h}}$ sur $X^{=h}_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\overline{1_h}}$ muni d'une action équivariante de $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times P_{h,d}(F_v) \times \mathbb{Z}$ telle que

- le sous-groupe unipotent de $P_{h,d}(F_v)$ agit trivialement et
- l'action du facteur $GL_h(F_v)$ de son Levi agit via $\mathrm{val} \circ \det : GL_h(F_v) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$.

On introduit alors la version induite de ces systèmes locaux

$$\mathcal{L}(\rho_v) := \mathcal{L}(\rho_v)_{\overline{1_h}} \times_{P_{h,d}(F_v)} GL_d(F_v),$$

muni donc d'une action équivariante de $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times GL_d(F_v) \times \mathbb{Z}$.

Notation 3.1. — La correspondance de Jacquet-Langlands permet de paramétrer les $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentations irréductibles de $D^\times_{v,h}$ à l'aide des représentations irréductibles cuspidales π_v de $GL_g(F_v)$ pour g un diviseur de $h = tg$, on écrit une telle représentation sous la forme $\pi_v[t]_D$.

Notation 3.2. — Pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et Π_t une représentation de $GL_{tg}(F_v)$, on note[2], cf. la première remarque de 2.1.3 de [2],

$$\widetilde{HT}_{\overline{1_{tg}}}(\pi_v, \Pi_t)(n) := \mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_{\overline{1_{tg}}} \otimes \Pi_t \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}-n}$$

le système local d'Harris-Taylor associé où

$$\Xi : \frac{1}{2}\mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}}_l^\times$$

1. en comparaison des strates de la définition 5.1
2. Lorsque $n = 0$, on le fera disparaitre des notations.