COMPLEX MANIFOLDS, FOLIATIONS AND UNIFORMIZATION

M. Brunella, S. Dumitrescu
P. Eyssidieux, A. Glutsyuk
L. Meersseman, M. Nicolau

Panoramas et Synthèses

Numéro 34-35

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

PANORAMAS ET SYNTHÈSES 34/35

COMPLEX MANIFOLDS, FOLIATIONS AND UNIFORMIZATION

M. Brunella, S. Dumitrescu, P. Eyssidieux
A. Glutsyuk, L. Meersseman, M. Nicolau

Société mathématique de France 2011
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Marco Brunella
Institut de Mathématiques de Bourgogne, UMR 5584, 9 av. Savary, 21078 Dijon, France

Sorin Dumitrescu
Laboratoire J.-A. Dieudonné, Univ. Nice-Sophia Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02, France
E-mail : `dumitres@unice.fr`

Philippe Eyssidieux
Institut Fourier, Université Joseph Fourier, Grenoble, France
E-mail : `eyssi@fourier.ujf-grenoble.fr`

Alexey Glutsyuk
Laboratoire J.-V. Poncelet (UMI 2615 du CNRS et l'Université Indépendante de Moscou).
National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia.
Permanent address: CNRS, Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, M.R., École Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon 07, France.
E-mail : `aglutsyu@ens-lyon.fr`

Laurent Meersseman
I.M.B., Université de Bourgogne, B.P. 47870, 21078 Dijon Cedex, France.
Centre de Recerca Matemàtica, 08193 Bellaterra, Spain
E-mail : `laurent.meersseman@u-bourgogne.fr, lmeersseman@crm.cat`

Marcel Nicolau
Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra 08193, Spain
E-mail : `nicolau@mat.uab.cat`

COMPLEX MANIFOLDS, FOLIATIONS AND UNIFORMIZATION

M. Brunella, S. Dumitrescu, P. Eyssidieux
A. Glutsyuk, L. Meersseman, M. Nicolau

Abstract. — This volume deals with uniformization problems in complex geometry. These six texts come from the six courses of the summer school "Uniformisation de familles de variétés complexes", which was held in Dijon from August 31st till September 11th, 2009 as part of ANR project Complexe ANR-08-JCJC-0130-01. From the one hand, they are written for non-specialist audience. From the other hand, they present the last developments and open problems about uniformization in various contexts. In particular, it focuses on the following topics: uniformization of foliations by curves, holomorphic geometric structures on manifolds, Shafarevich problem about the universal cover of projective manifolds, Sullivan's dictionnary in holomorphic dynamics, foliations by complex leaves and deformation of transversely holomorphic foliations.

Résumé. — **Variétés complexes, feuilletages, uniformisation.** Ce volume traite des problèmes d'uniformisation en géométrie complexe. Les six textes présentés sont issus des six cours de l'école d'été « Uniformisation de familles de variétés complexes » organisée à Dijon du 31 août au 11 septembre 2009 par l'ANR Complexe ANR-08-JCJC-0130-01. Ils reflètent d'une part le souci pédagogique des intervenants d'être introductifs, et donc abordables par des non-spécialistes. Et ils constituent d'autre part des exposés des dernières avancées et des problèmes ouverts liés à l'uniformisation dans des situations précises et variées. On trouvera ainsi comme thématiques abordées l'uniformisation des feuilletages par courbes, les structures géométriques holomorphes sur les variétés, le problème de Shafarevich concernant le revêtement universel des variétés projectives, le dictionnaire de Sullivan en dynamique holomorphe, les feuilletages à feuilles complexes et les déformations de feuilletages transversalement holomorphes.

TABLE OF CONTENTS

ABSTRACTS

Foliation uniformization and integer leaves
MARCO BRUNELLA 1

On local and global uniformization of rigid holomorphic geometric structures
SORIN DUMITRESCU 53

We give here some classification results dealing with compact complex manifolds endowed with rigid holomorphic geometric structures.

Lectures on the Shafarevich Conjecture on uniformization
PHILIPPE EYSSIDIEUX 101

After a survey of the Shafarevich Conjecture on holomorphic convexity of the universal covering space of a complex projective manifold, we introduce some tools: Corlette-Simpson's non abelian Hodge theory ang Gromov-Schoen's building valued harmonic mappings. The developpement of these tools has allowed to confirm this conjecture when the fundamental group is linear and we outline the proof of this recent result.

Affine and hyperbolic laminations in holomorphic dynamics
ALEXEY GLUTSYUK 149

In 1985 D. Sullivan had introduced a dictionary between two domains of complex dynamics: Kleinian groups and rational iterations on the Riemann sphere. This dictionary motivated many remarkable results in both domains. M. Lyubich and Y. Minsky have suggested to extend Sullivan's dictionary by constructing an analogue of the hyperbolic manifold of a Kleinian group for rational functions: a three-dimensional hyperbolic orbifold lamination constructed from the backward orbit space. The lifted action to the latter lamination of the non-bijective rational dynamics is bijective and properly discontinuous. The lamination factorizes through the lifted action to the so-called quotient hyperbolic lamination. The covering hyperbolic 3-space of each leaf has a canonical marked point "infinity" at its boundary. The horospheres passing through infinity (i.e., the horizontal planes in the half-space model) induce horospheric lamination of the quotient.

The horospheric lamination is the unstable lamination for the vertical geodesic flow on the hyperbolic leaves. Studying the hyperbolic 3-manifolds associated to Kleinian groups resulted in solutions of all big problems in the theory in 2004–2006. There is a hope that studying the hyperbolic laminations associated to rational functions would imply important dynamical corollaries.

The present paper is a survey of the current state of art of Lyubich-Minsky laminations. First we give a brief introduction to Kleinian groups and rational dynamics. In the Kleinian group part we present a sketch of the solution of the famous Ahlfors' Measure Conjecture by D. Calegari and D. Gabai. Afterwards we introduce Lyubich-Minsky affine and hyperbolic laminations and present basic results about them by M.Lyubich, Y.Minsky with co-authors. Then we present the authors' results on topological transitivity, minimality and unique ergodicity of the quotient horospheric laminations. At the end of the paper we give a list of open problems.

This text is an introduction to foliations by complex manifolds and uniformization problems of these foliations. We give a list of fundamental questions as well as an overwiew of the known results.

The theory of deformations of compact complex manifolds of arbitrary dimension was initiated by Kodaira and Spencer and culminated with Kuranishi's theorem, which states the existence of a *versal family* of deformations for any given compact complex manifold. The versal family contains all the complex structures on the manifold that are close enough to the given one and it is parametrized by a finite dimensional analytic space, called the Kuranishi space of the complex manifold. It is a local analog of the Teichmüller space for compact Riemann surfaces. The purpose of this article is to explain the main ideas of that theory and to show how this approach can be adapted to study the deformations of holomorphic and transversely holomorphic foliations following the work of Girbau, Haefliger and Sundararaman. Some concrete examples are discussed in detail, in order to illustrate the subtleties of the theory and to show different strategies to compute the Kuranishi space.

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Nous présentons des résultats de classification pour des variétés complexes compactes possèdant des structures géométriques holomorphes rigides.

Après une présentation de la conjecture de Shafarevich prédisant que le revêtement universel d'une variété projective algébrique complexe est holomorphiquement convexe, on introduit quelques outils de la théorie de Hodge non abélienne de Corlette-Simpson et de la théorie des applications harmoniques à valeurs dans des immeubles de Gromov-Schoen. Le développement de ces outils a permis de confirmer cette conjecture pour les groupes fondamentaux linéaires et on donne les grandes lignes de la preuve.

En 1985 D. Sullivan a introduit un dictionnaire entre deux domaines de la dynamique complexe : les groupes kleiniens et les itérations rationnelles sur la sphère de Riemann. Ce dictionnaire a motivé beaucoup de résultats remarquables dans les deux domaines. M. Lyubich et Y. Minsky ont suggeré d'étendre le dictionnaire de Sullivan, en construisant un analogue de la variété hyperbolique d'un groupe kleinien pour les fonctions rationnelles : une lamination singulière par orbifolds hyperboliques de dimension trois, construite à partir de l'espace d'orbites inverses. Le relevé à cette dernière lamination de l'action non-bijective de la dynamique rationnel est une action bijective et proprement discontinue. Le quotient de la lamination par l'action relevée s'appelle la lamination hyperbolique quotient. L'espace « uniformisant » de chaque feuille est l'espace hyperbolique de dimension trois, avec un point marqué canonique « infini » à la frontière. Les horosphères passant par l'infini (c'est-à-dire, les plans horizontaux dans le modèle de demi-espace) induisent la lamination horosphérique du quotient. La lamination horosphérique est la lamination instable pour le flot géodésique vertical le long des feuilles hyperboliques. L'étude des variétés hyperboliques associées aux groupes kleiniens a amené à la solution de tous les grands problèmes de la théorie en 2004–2006. Il y a un espoir, que l'étude des laminations hyperboliques, associées aux fonctions rationnelles, entrainera des corollaires dynamiques importants.

Cet article est un survol de l'état de lieux actuel des laminations de Lyubich-Minsky. Nous commençons par une petite introduction en la théorie de groupes kleiniens et en la dynamique rationnelle. Dans la partie concernant les groupes kleiniens, nous présentons une esquisse de la solution de la célèbre conjecture d'Ahlfors sur la mesure par D. Calegari et D. Gabai. Puis, nous introduisons les laminations affines et hyperboliques de Lyubich-Minsky, et nous présentons leurs propriétés de base, démontrées par M. Lyubich, Y. Minsky et leurs co-auteurs. Puis nous présentons les résultats de l'auteur sur la transitivité topologique, minimalité et ergodicité unique des laminations horosphériques quotients. À la fin de l'article, nous présentons une liste de problèmes ouverts.

Ce texte est une introduction aux feuilletages par variétés complexes et aux problèmes d'uniformisation de tels feuilletages. Nous donnons une liste fondamentale de questions naturelles sur ces objets ainsi qu'un aperçu des résultats connus.

La théorie des déformations des variétés complexes de dimension arbitraire fut développée par Kodaira et Spencer et culmina avec le théorème de Kuranishi qui établit l'existence d'une *famille verselle* de déformations pour n'importe quelle variété complexe compacte. Cette famille verselle contient toutes les structures complexes sur la variété qui sont proches de celle de départ et elle est parametrée par un espace analytique de dimension finie, appelé espace de Kuranishi. C'est un analogue local de l'espace de Teichmüller pour les surfaces de Riemann compactes. Le but principal de cet article est d'expliquer les idées principales de cette théorie et de montrer, d'après les travaux de Girbau, Haefliger et Sundararaman, comment cette approche peut être adaptée à l'étude des déformations des feuilletages holomorphes et transversalement holomorphes. Plusieurs exemples concrets sont étudiés en détail avec l'objectif d'illustrer les points délicats de la théorie et de montrer plusieurs stratégies pour calculer de manière explicite l'espace de Kuranishi correspondant.

PRÉFACE

Uniformisation de Koebe–Poincaré. – Les six textes réunis dans ce volume puisent leurs sources dans une origine commune : le *Théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann* de Koebe-Poincaré (1907). Ce théorème fondamental, véritable joyau des mathématiques du dix-neuvième siècle, affirme que toute surface de Riemann connexe et simplement connexe est isomorphe à l'un des trois modèles suivants : le disque unité $\mathbb{D}$, la droite affine $\mathbb{C}$, la droite projective $\overline{\mathbb{C}}$. Par conséquent, toute surface de Riemann connexe est le quotient d'un de ces trois modèles par un sous-groupe d'automorphismes holomorphes agissant librement et proprement.

Avant d'aborder le théorème général d'uniformisation, Poincaré développe à la fin du dix-neuvième siècle la théorie des *groupes kleiniens*. Il s'agit de sous-groupes discrets (infinis) Γ de transformations de Möbius (homographies) de $\overline{\mathbb{C}}$ qui agissent librement et proprement sur un ouvert non vide $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$. Le quotient de Ω par le groupe kleinien Γ est donc une surface de Riemann. Dans le cas particulier où Ω est le disque unité, le groupe Γ est dit *fuchsien*.

Les groupes fuchsiens sont au cœur du théorème d'uniformisation. En effet, une conséquence directe est que toute surface de Riemann connexe est isomorphe à la droite projective, à un quotient de $\mathbb{C}$ par un groupe de translations ou bien au quotient du disque unité par un groupe fuchsien. En particulier, toute surface de Riemann compacte et connexe, de genre $g \geq 2$, s'obtient comme quotient du disque unité par un groupe fuchsien.

Il y a toutefois d'autres manières de représenter une telle surface de Riemann comme quotient d'un domaine $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ par un groupe kleinien Γ. Citons, à titre d'exemples, les uniformisations à la Schottky, dans lesquelles Ω est le complémentaire d'un ensemble de Cantor, et les uniformisations quasi-fuchsiennes, où Ω est un domaine borné par une courbe de Jordan « fractale » (un quasi-disque bordé par un quasi-cercle).

Uniformisation d'Ahlfors–Bers. – Après Poincaré, la théorie des groupes kleiniens a été systématiquement et profondément développée, notamment sous l'impulsion d'Ahlfors et Bers qui l'ont utilisée pour comprendre l'espace des modules (espace de Teichmüller) des surfaces de Riemann compactes (marquées).

En effet, après le résultat « individuel » d'uniformisation d'une surface de Riemann donnée, le problème naturel qui se posa fut celui de comprendre l'uniformisation simultanée d'une famille de surfaces de Riemann, compactes et de genre $g \geq 2$, ou, en d'autres termes, de comprendre l'espace des modules des surfaces de Riemann. Il convient ici de regarder une surface de Riemann comme étant une surface différentiable qui est équipée d'une structure complexe. L'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_g$ est alors défini comme l'espace des structures complexes que l'on peut mettre sur *la* surface différentiable compacte connexe orientée de genre g, modulo l'action du groupe des difféomorphismes isotopes à l'identité. Les travaux d'Ahlfors et Bers permettent de voir $\mathcal{T}_g$ comme variété complexe de dimension $3g-3$, et, plus précisément, comme domaine borné contractile dans $\mathbb{C}^{3g-3}$. Au-dessus de $\mathcal{T}_g$ on dispose de la fibration tautologique $\widehat{\mathcal{T}}_g \to \mathcal{T}_g$: la fibre au-dessus d'un point de $\mathcal{T}_g$ est la surface de Riemann associée à ce même point. L'espace $\widehat{\mathcal{T}}_g$ est aussi une variété complexe, de dimension $3g-2$ qui admet une fibration holomorphe sur $\mathcal{T}_g$

Le théorème d'uniformisation de Koebe–Poincaré affirme, en particulier, que le revêtement universel de chaque fibre de $\widehat{\mathcal{T}}_g$ est réalisable comme domaine simplement connexe dans $\mathbb{C}$. De façon analogue, le *Théorème d'uniformisation simultanée* de Bers affirme que le revêtement universel $\widetilde{\mathcal{T}}_g$ de $\widehat{\mathcal{T}}_g$ est réalisable comme domaine dans $\mathbb{C}^{3g-3} \times \mathbb{C}$, fibré au dessus de $\mathcal{T}_g \subset \mathbb{C}^{3g-3}$. Soulignons que, bien que chaque fibre de $\widetilde{\mathcal{T}}_g$ au dessus de $\mathcal{T}_g$ soit un disque, l'espace $\widetilde{\mathcal{T}}_g$ *n'est pas* le produit $\mathcal{T}_g \times \mathbb{D}$, et c'est justement cette non-trivialité qui rend la théorie des surfaces de Riemann si riche. Par exemple, la théorie des déformations quasi-conformes des groupes kleiniens est intimement liée au fait que $\widetilde{\mathcal{T}}_g$ ne soit pas un produit : si une fibre de $\widetilde{\mathcal{T}}_g$ est réalisée (dans un plongement de Bers) par le disque unité $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, les autres fibres seront réalisées par des quasi-disques, et les surfaces de Riemann correspondantes seront uniformisées par des groupes quasi-fuchsiens. Incidemment, ceci montre aussi que les uniformisations quasi-fuchsiennes sont bien plus naturelles que les uniformisations fuchsiennes.

Beaucoup de propriétés des familles de surfaces de Riemann compactes sont liées à la structure analytique complexe des variétés $\mathcal{T}_g$ et $\widetilde{\mathcal{T}}_g$ (et aussi à celle de la famille universelle $\widehat{\mathcal{T}}_g$). Par exemple, $\widetilde{\mathcal{T}}_g$ est un domaine d'holomorphie dans $\mathbb{C}^{3g-2}$, ce qui a des conséquences sur la variation des périodes dans une famille de surfaces de Riemann. Griffiths utilisa le théorème d'uniformisation simultanée de Bers pour montrer un résultat remarquable : chaque variété projective complexe de dimension n contient un ouvert de Zariski dont le revêtement universel est un domaine d'holomorphie contractile et borné dans $\mathbb{C}^n$.

Le texte de Brunella s'inscrit dans cette lignée. On y étudie les feuilletages holomorphes de dimension 1 sur les variétés projectives complexes. Les feuilles d'un tel feuilletage forment une « famille » de surfaces de Riemann (le plus souvent non compactes, voire de genre infini ou avec une infinité de bouts), et il s'agit de construire et d'étudier l'analogue de l'espace $\widetilde{\mathcal{T}}_g$ ci-dessus, i.e. un espace qui uniformise simultanément toutes les feuilles du feuilletage. Ce texte s'inscrit donc dans le thème général de l'*uniformisation de familles de variétés complexes.*

Dictionnaire de Sullivan. Lien avec les 3-variétés hyperboliques d'après Thurston–Lyubich–Minsky. – Il convient de rappeler que la droite projective $\overline{\mathbb{C}}$ s'identifie au bord de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$ et que l'action (au bord) d'un groupe kleinien Γ se prolonge en une action isométrique sur $\mathbb{H}^3$. Il s'ensuit qu'à tout groupe kleinien Γ on peut associer la surface de Riemann Ω/Γ (avec Ω ouvert maximal dans la droite projective sur laquelle Γ agit librement et proprement) et également la 3-variété hyperbolique $\mathbb{H}^3/\Gamma$.

À partir des années 1970, on a exploré les liens importants de la théorie d'Alhfors–Bers avec les variétés hyperboliques de dimension 3 (travaux de Thurston), ou avec la dynamique des fractions rationnelles (dictionnaire de Sullivan). On trouvera dans le texte de Glutsyuk un compte rendu de ces développements, qui sont aujourd'hui très féconds et d'actualité. En particulier, ce texte reprend des constructions de Sullivan et de Lyubich–Minsky qui associent à toute fraction rationnelle f deux *laminations* $\mathcal{A}_f$ et $\mathcal{H}_f$, la première par surfaces de Riemann, la deuxième par variétés hyperboliques de dimension 3. A l'instar des liens qu'entretient la géométrie de $\mathbb{H}^3/\Gamma$ avec l'analyse de Ω/Γ et la dynamique de Γ, il existe également des liens étroits entre les laminations $\mathcal{H}_f$ et $\mathcal{A}_f$ et la dynamique de f.

Il y a toutefois une différence entre le cas « groupe kleinien » et le cas « fraction rationnelle » : dans le premier cas Ω/Γ est une union finie de surfaces de Riemann, tandis que dans le deuxième cas $\mathcal{A}_f$ est une « famille » infinie (non dénombrable) de surfaces de Riemann. Il s'agit donc, avant tout, de comprendre comment les uniformisations des feuilles de $\mathcal{A}_f$ se recollent ensemble : ce qui nous amène à un deuxième exemple d'*uniformisation de familles de variétés complexes.*

Structures géométriques d'après Cartan–Ehresmann–Gromov. – On peut envisager le théorème d'uniformisation de Koebe–Poincaré du point de vue des *structures géométriques.* Une (V,G)-géométrie sur une variété différentiable M est la donné d'un atlas sur M à valeurs dans une variété modèle V, dont les changements de cartes sont donnés par un pseudogroupe G agissant sur V par difféomorphismes locaux. C'est une notion dégagée par Ehresmann, suite aux travaux de Lie et Cartan, et dont l'importance en géométrie ne cesse de croître. Beaucoup de classes de variétés ayant une structure supplémentaire rentrent dans cette notion : les variétés complexes, les variétés symplectiques, les variétés Riemanniennes localement symétriques, les variétés feuilletées...

Une surface de Riemann possède, par définition, une $(\mathbb{C},\mathcal{H})$-géométrie, où $\mathcal{H}$ est le pseudogroupe des difféomorphismes holomorphes entre ouverts de $\mathbb{C}$. Un corollaire du théorème d'uniformisation est que toute surface de Riemann possède, en plus, une $(\overline{\mathbb{C}},PSL)$-géométrie, compatible avec la structure complexe, où PSL est le pseudogroupe des transformations de Möbius (homographies) de $\overline{\mathbb{C}}$. C'est-à-dire, on peut réduire le pseudogroupe qui donne les changements de cartes de $\mathscr{H}$ (de dimension infinie) à PSL (de dimension 3).

À l'instar de la théorie de Teichmüller, qui s'intéresse aux structures complexes que l'on peut mettre sur une surface différentiable donnée (compacte et de genre $g \geq 2$), il est envisageable de s'intéresser aux différentes géométries de Möbius que l'on peut mettre sur une surface de Riemann donnée. Les espaces de modules correspondants ont été étudiés par Gunning à partir des années 1960, et sont encore aujourd'hui objets d'investigation, par exemple en connexion avec la géométrie hyperbolique en dimension 3. Notons que, en général, une surface de Riemann admet une pléthore de géométries de Möbius : par exemple, une uniformisation de type fuchsien engendre une géométrie de Möbius qui n'est pas équivalente à celle engendrée par une uniformisation de type quasi-fuchsien, et encore moins à celle engendrée par une uniformisation de type Schottky. En plus, il existe des géométries de Möbius qui ne sont pas uniformisables, au sens qu'elles ne proviennent pas d'une uniformisation de la surface de Riemann de type Ω/Γ, avec Γ kleinien : il devient nécessaire de remplacer le domaine *uni*forme $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ par un domaine *multi*forme, étalé au dessus de $\overline{\mathbb{C}}$. Ce genre de pathologie est déjà présent dans les travaux classiques, dûs notamment à Schwarz, Klein et Poincaré, autour du théorème d'uniformisation.

Quand on passe à l'étude des variétés (complexes) de dimension supérieure, ce point de vue des structures géométriques offre une approche alternative au « théorème d'uniformisation » qui n'existe pas. En effet, on sait bien qu'il serait vain d'essayer de « classifier » les revêtements universels des variétés complexes de dimension supérieure à 2. Plus modestement, on peut se demander si certaines classes de variétés complexes compactes possèdent telle ou telle autre structure géométrique holomorphe, dégager des obstructions à leur existence, en étudier les espaces de modules ou leur uniformisabilité.

Le texte de Dumitrescu explore cette problématique, dans un cadre de « structure géométrique » bien plus général que celui évoqué ci-dessus (grosso modo, on ne requiert pas la condition d'intégrabilité qui est sous-jacente à la notion de (V, G)-géométrie). On y trouve détaillée, en particulier, la théorie des *structures géométriques rigides* au sens de Gromov, et des résultats d'existence et d'uniformisation de (V, G)-géométries sur des variétés possédant de telles structures géométriques holomorphes rigides.

Déformations à la Kodaira–Spencer–Kuranishi. Feuilletages transversalement holomorphes, feuilletages à feuilles complexes. – Comme les surfaces de Riemann, les variétés complexes compactes de dimension supérieure peuvent admettre aussi des déformations non triviales, et former ainsi des familles non triviales. La théorie locale correspondante, où l'on considère seulement des petites déformations de la structure complexe, a été initiée par Kodaira et Spencer. Le couronnement de ces travaux est le théorème de Kuranishi sur l'existence, pour toute variété complexe compacte, d'une *famille verselle*, de dimension finie, qui « contient » toutes les petites déformations