Revue d'histoire des mathématiques
24 (2018), p. 107–206

UNE THÉORIE DE LA MESURE DES RAPPORTS DANS LE *CHILIAS LOGARITHMORUM* DE KEPLER (1624)

Sabine Rommevaux-Tani

Résumé. — Johannes Kepler publie en 1624 un traité sur les Logarithmes, intitulé *Chilias Logarithmorum*. Il se propose dans ce traité de donner une démonstration légitime de la construction des Logarithmes, celle de Neper étant à ses yeux entachée par l'usage qui y est fait du mouvement. Kepler fonde sa construction sur une théorie générale de la mesure des rapports, dont les Logarithmes sont un cas particulier. Nous proposons ici une analyse du traité de Kepler, en montrant comment sa théorie de la mesure des rapports trouve ses racines dans une théorie médiévale des rapports mise en place par Thomas Bradwardine et à sa suite, Nicole Oresme. Et nous donnons en annexe la traduction française de la partie théorique du *Chilias Logarithmorum*.

Abstract (A Theory for the Measure of Ratios in Kepler's Chilias Logarithmorum (1624))

Johannes Kepler published in 1624 a treatise on logarithms, the *Chilias Logarithmorum*. In this treatise, he intended to give a legitimate proof of the construction of logarithms, that of Neper being, in its opinion, tainted by the use made of movement. Kepler based his construction on a general theory of the measurement of ratios, of which Logarithms are a special case. We propose here an analysis of Kepler's treatise, showing how his theory of the measurement of ratios finds its roots in a medieval theory of ratios established by Thomas Bradwardine and, after him, Nicole Oresme. We give in appendix the French translation of the theoretical part of the *Chilias Logarithmorum*.

Texte reçu le 9 mai 2017, accepté le 3 octobre 2017, révisé le 24 octobre 2017.

S. Rommevaux-Tani, CNRS, Sphere, UMR 7219, Univ. Paris Diderot, Bâtiment Condorcet, Case 7093, 5 rue Thomas Mann, 75205 Paris Cedex 13, France.
Courrier électronique : `sabine.rommevaux@univ-paris-diderot.fr`

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A45, 01A35.

Mots clefs : Kepler, Bradwardine, Oresme, logarithme, théorie des rapports et proportions, xvii[e] siècle.

Key words and phrases. — Kepler, Bradwardine, Oresme, logarithm, theory of ratios and proportions, seventeenth century.

À la mémoire de Gérard Simon,
mon maître et ami[1].

INTRODUCTION

Johannes Kepler publie en 1624, à Marburg, chez l'éditeur Kaspar Chemlin, un traité sur les Logarithmes, intitulé *Chilias Logarithmorum* (*La chiliade des Logarithmes*)[2] [Kepler 1960, p. 317–345]. Nous ne nous attarderons pas ici sur les circonstances de la publication de ce texte, que Kepler relate dans son adresse aux lecteurs, en introduction au *Supplementum Chiliadis Logarithmorum, continens præcepta de eorum usu* (*Supplément à La chiliade des Logarithmes, contenant les règles de leur usage*), qu'il publie l'année suivante chez le même éditeur [Kepler 1960, p. 355–358] et dont on trouve aussi certains éléments dans sa correspondance [Naux 1966, p. 128–138]. Nous ne reviendrons pas non plus sur la place des travaux de Kepler dans l'histoire de la construction des tables de Logarithmes[3], ni sur les différences avec ce qu'ont fait avant lui Jost Bürgi (ou Juste Byrge), collègue de Kepler à Prague, John Napier (ou Neper) et Henry Briggs [Hutton 1791, vol. I, p. xxxiv-xxxvii; Delambre 1821, p. 506–513; Belyi 1975, p. 654–657; Clark & Montelle 2012; Clark 2015, p. 9–12]. Nous voudrions nous arrêter sur la construction des Logarithmes de Kepler et plus généralement sur sa théorie des mesures des rapports, dont les Logarithmes dérivent. Nous souhaitons montrer comment cette construction s'ancre dans une théorie des rapports, qui n'est pas seulement celle

[1] C'est Gérard Simon qui m'a suggéré, il y a plusieurs années de cela, de m'intéresser au traité sur les logarithmes de Kepler, après qu'il m'a entendu lui présenter mon travail sur les rapports de rapports de Nicole Oresme.

[2] Le titre complet de l'ouvrage est : *Chilias Logarithmorum ad totidem numeros rotundos, præmissa demonstratione legitima ortus Logarithmorum eorumque usus, quibus nova traditur arithmetica, seu compendium, quo post numerorum notitiam nullum nec admirabilius, nec utilius solvendi pleraque Problemata Calculatoria, præsertim in Doctrina Triangulorum, citra Multiplicationis, Divisionis, Radicumque extractionis, in Numeris prolixis, labores molestissimos* (La chiliade des Logarithmes d'autant de nombres ronds, précédée d'une démonstration légitime de l'origine des Logarithmes et de leur usage, pour lesquels est présentée une nouvelle arithmétique ou un Compendium, dont, après la connaissance des nombres, rien n'est plus parfait ni plus utile pour résoudre la plupart des problèmes de calcul, surtout en ce qui concerne la théorie des triangles, sans les opérations de multiplication, de division et d'extraction de racines très pénibles pour les nombres étendus).

[3] Il faut ajouter aux deux traités déjà cités les *Tabulæ Rudolphinæ*, que Kepler publie à Ulm en 1627 et dans lesquelles il utilise les Logarithmes pour l'établissement de tables astronomiques, qui s'appuient sur les nouvelles observations de Tycho Brahé.

du livre V des *Éléments* d'Euclide, contrairement à ce que dit Kepler[4], mais reprend aussi certains éléments d'une théorie mise en place au XIVe siècle par Thomas Bradwardine à Oxford et Nicole Oresme à Paris et qui dépasse la théorie euclidienne. Ce lien avait déjà été souligné par Benjamin Wardhaugh [2008, p. 40–41], mais sans que l'auteur entre dans les détails de la théorie képlérienne. Or, il nous semble que la démarche de Kepler n'a pas reçu toute l'attention qu'elle méritait et que son projet, en particulier son usage de la théorie des rapports, n'a pas toujours été bien compris par les historiens des mathématiques, même si d'aucuns reconnaissent l'excellence de son travail[5].

Ainsi, Charles Hutton [1791, p. lii] salue la démarche de Kepler et la rigueur de ses démonstrations :

> Kepler here, first of any, treats of logarithms in the true and genuine way of the measures of ratios, or proportions, as he calls them, and that in a very full and scientific manner [...]. Kepler first erects a regular and purely mathematical system of proportions, and the measures of proportions, treated at considerable length in a number of propositions, which are fully and chastely demonstrated by genuine mathematical reasoning, and illustrated by numerical examples. This part contains and demonstrates both the nature and the principles of the structure of logarithms.

Jean-Baptiste Delambre [1821, p. 509] juge quant à lui que les démonstrations de Kepler sont « souvent longues et obscures ». Mais c'est Charles Naux [1966, p. 129] qui est le plus sévère à l'encontre de Kepler :

---

4 Dans l'adresse au lecteur qui ouvre le *Supplementum,* Kepler [1625; 1960, p. 356] écrit : « Simul autem fuit ipso opere monendus Lector meus, Logarithmos non primum nasci cum Sinubus, seu rectis in Circulo, quod Neperiana descriptio incautius inspecta præ se ferre videtur, sed foris extra Geometriam Circuli constitui, tanquam intra metas libri Quinti Euclidis [...] » (En même temps mon Lecteur doit se souvenir que, dans cet ouvrage, les Logarithmes ne trouvent pas leur origine d'abord dans les sinus ou dans les droites des cercles — ce que la description népérienne considérée imprudemment semble indiquer —, mais qu'il sont construits indépendamment, en dehors de la géométrie du cercle, dans les limites du livre V d'Euclide [...]). La traduction est mienne, mais je remercie Marie-Hélène Depardon qui a bien voulu la réviser.

5 Ainsi, Joseph Ehrenfried Hofmann [1975, p. 688] écrit : « His work on logarithms (1625) is, however, excellent. Napier's original formulation (1619) made use of the concept of motion, and in adapting Napier's work for practical applications, Kepler reduces it to pure arithmetic. His process of taking successive square roots foreshadowed natural logarithms. Among the applications we find the inequality which was later (though without reference to Kepler) to become the starting point for an improved and shorter method of obtaining natural logarithms ».

> Pour céder à la séduction de retrouver les Logarithmes de Neper par une voie irréprochable, il a conçu une théorie qui nous est conservée dans ses « Chiliades logarithmorum ». Cette œuvre blesse par endroits le sens de la parfaite logique, tout en échappant à la condamnation sans appel ; un réalisme curieux et bien soutenu lui permet de ne pas tomber dans l'ornière, tout en la côtoyant sans cesse et finalement, ses calculs lui donnent les Logarithmes des tables du « Logarithmorum... descriptio » de 1614 [c'est l'ouvrage de Neper]. Mais leur logique fait la grimace, elle se tient à grands coups de conventions, de principes arbitraires qui la ramènent dans la bonne voie dès qu'elle défaille ; le moins que l'on puisse dire, c'est que les axiomes fondamentaux assurant la réussite finale sont tirés par les cheveux [...]. La théorie est de caractère insolite ; plus d'une fois elle heurte le simple bon sens.

Et plus loin, à propos de la théorie des rapports qui est au cœur de la théorie képlérienne, Naux [1966, p. 156] ajoute :

> Cette mesure des proportions, qui a de quoi intriguer la pensée moderne, était donc considérée par Kepler comme une démarche normale de la pensée mathématique, il lui a fait confiance contre le vent, les marées de certaines situations délicates où elle l'a placé, et finalement c'est elle qui a gâté son œuvre.

C'est donc cette théorie de la mesure des proportions (nous, nous parlons plutôt de mesure des rapports[6]) que nous souhaitons exposer ici en détail, en la replaçant dans le contexte des mathématiques de l'époque, même si nous ne nous interdirons pas l'usage de notations modernes pour rendre notre propos plus accessible au lecteur d'aujourd'hui. Mais on pourra se reporter au traité original de Kepler ou à notre traduction, en annexe, pour retrouver la manière dont les mathématiques étaient écrites au XVII^e siècle, dans un style euclidien, sans écriture symbolique.

1. UNE THÉORIE DES RAPPORTS QUI DÉPASSE CELLE D'EUCLIDE

La construction des Logarithmes décrite par Kepler lui-même

Dans l'adresse au lecteur du *Supplementum*, Kepler [1960, p. 355–356] revient sur la construction qu'il a exposée dans le *Chilias Logarithmorum* :

> J'ai décrit quel est le véritable sujet de cette spéculation et j'ai établi par des énoncés évidents tout ce qui ne serait pas en vérité sous le genre des lignes ou du mouvement et du flux, ou, dirais-je, de n'importe quelle autre

6 Nous entendons par rapport la relation quantitative à deux termes définie par Euclide au livre V. Nous réservons le terme proportion ou proportionnalité à l'identité des rapports, soit à une relation à plus de trois termes.

quantité sensible[7], mais sous le genre des relations et de la quantité mentale. Ensuite, puisque cette quantité mentale (dite λόγος par les grecs et que les latins traduisent rarement par « ratio » et plus souvent par « proportio ») est, comme toutes les autres, susceptible de division à l'infini, j'ai établi les termes convenables de cette division, à partir, précisément, du même genre de choses ; on a coutume en effet de diviser les lignes par des points et les mouvements par des degrés des temps, mais les termes moyens entre les extrêmes divisent le rapport en grandeur. Cela étant établi avec succès, la démonstration faisait son chemin : pour tous les rapports commensurables a été établie la véritable mesure commune dans le genre des rapports ; une place a été faite à l'arbitraire dans le choix de l'élément du rapport que l'on doit prendre pour minimum et pour mesure ; il a aussi été démontré que les rapports sont presque toujours incommensurables et que l'élément minimum qu'on se serait plu à prendre pour l'un ne peut pas être la véritable mesure d'un autre rapport quelconque, car il pèche toujours par excès ou par défaut. Pour cette raison, on a recours à un autre élément arbitraire, de sorte que soit établi quelle est l'erreur et quelle différence entre les plus petits éléments des rapports incommensurables peut être dissimulée et engloutie dans la profondeur de l'imperceptible ; par conséquent, la mesure des rapports incommensurables, dite Logarithme, resurgit dans l'usage même des nombres, certes inapte pour la démonstration, mais très utile pour le calcul[8].

Kepler résume ici parfaitement sa démarche, mais cette description est bien obscure pour qui n'a pas lu le *Chilias Logarithmorum.* Nous espérons que l'analyse qui suit permettra de rendre ce passage plus clair. Mais, sans

---

7 Kepler vient de reprocher à Neper l'usage du mouvement géométrique dans sa construction des Logarithmes.

8 « [...] subjectum hujus speculationis, quodnam esset genuinum, descripsi ; quodque id non esset verè sub genere vel linearum, vel motus fluxusque, aut cujusquàm alterius quantitatis sensilis, ut sic dicam, sed sub genere Relationum, quantitatisque mentalis, evidentibus enunciationibus constitui : deinde, cùm, ut omnes cæteræ, sic etiam mentalis ista quantitas (λόγος Græcis dicta, quod Latini Rationem minus usitatè, crebrius Proportionem transferunt) divisionem in infinitum recipiat : metas etiam hujus divisionis congruas, ex eodem scilicet genere rerum constitui : Lineæ enim punctis, motus articulis temporum dividi solet ; at Proportionem dispescunt termini inter extremos magnitudine medii. Hisce sic constitutis feliciter, procedebat demonstratio : vera proportionum omnium communicantium communisque mensura facta est & ipsa de genere proportionum : locus est factus Arbitrio, in eligendo proportionis Elemento, quodnam deberet haberi pro minimo, proque mensura : demonstratum etiam est plerunque esse proportiones inter se incommunicabiles ; eoque minimum unius Elementum quod placuisset, non posse esse mensuram genuinam proportionis cujuscunque alterius : semper enim peccari vel excessu, vel defectu. Ea de causa factus jam est hic alter locus Arbitrio, ut quinam defectus, quæ minimorum Elementorum incommunicabilium differentia dissimulari posset, inque profundum insensibilitatis demergi, constitueretur, ut sic tandem in usum ipsum numerorum redundaret, absurda quidem demonstranti, sed utilissima computanti, incommunicabilium proportionum communis mensura, Logarithmus dicta. » (Là encore je remercie Marie-Hélène Depardon pour avoir révisé ma traduction).