371

ASTÉRISQUE

2015

RELATIVE p-ADIC HODGE THEORY: FOUNDATIONS

Kiran S. KEDLAYA

Ruochuan LIU

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France.

Numéro 371

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
B.P. 67	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13274 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
christian.smf@cirm-math.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs 2015

Vente au numéro : 64 € ($ 96)
Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1033)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-807-7

Directeur de la publication : Marc Peigné

ASTÉRISQUE 371

RELATIVE p-ADIC HODGE THEORY: FOUNDATIONS

Kiran S. Kedlaya
Ruochuan Liu

Société Mathématique de France 2015
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

K. S. Kedlaya

Department of Mathematics, Room 7202, University of California, San Diego,
9500 Gilman Drive, La Jolla, CA 92093-0112, USA.

E-mail : `kedlaya@ucsd.edu`

R. Liu

Department of Mathematics, University of Michigan, 1844 East Hall,
530 Church Street, Ann Arbor, MI 48109-1043, USA.

E-mail : `ruochuan@umich.edu`

RELATIVE p-ADIC HODGE THEORY: FOUNDATIONS

Kiran S. Kedlaya, Ruochuan Liu

***Abstract.* —** We describe a new approach to relative p-adic Hodge theory based on systematic use of Witt vector constructions and nonarchimedean analytic geometry in the style of both Berkovich and Huber. We give a thorough development of φ-modules over a relative Robba ring associated to a perfect Banach ring of characteristic p, including the relationship between these objects and étale $\mathbb{Z}_p$-local systems and $\mathbb{Q}_p$-local systems on the algebraic and analytic spaces associated to the base ring, and the relationship between (pro-)étale cohomology and φ-cohomology. We also make a critical link to mixed characteristic by exhibiting an equivalence of tensor categories between the finite étale algebras over an arbitrary perfect Banach algebra over a nontrivially normed complete field of characteristic p and the finite étale algebras over a corresponding Banach $\mathbb{Q}_p$-algebra. This recovers the homeomorphism between the absolute Galois groups of $\mathbb{F}_p((\pi))$ and $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ given by the field of norms construction of Fontaine and Wintenberger, as well as generalizations considered by Andreatta, Brinon, Faltings, Gabber, Ramero, Scholl, and most recently Scholze. Using Huber's formalism of adic spaces and Scholze's formalism of perfectoid spaces, we globalize the constructions to give several descriptions of the étale local systems on analytic spaces over p-adic fields. One of these descriptions uses a relative version of the Fargues-Fontaine curve.

***Résumé* (Théorie de Hodge p-adique dans le cas relatif : fondations)**

Nous décrivons une approche nouvelle de la théorie de Hodge p-adique dans le cas relatif, fondée sur l'utilisation systématique des constructions des vecteurs de Witt et de la géométrie analytique non archimédienne à la manière de Berkovich et de Huber. Nous donnons un traitement approfondi des φ-modules sur un anneau de Robba relatif associé à un anneau de Banach parfait de caractéristique p, qui inclut le lien entre ces objets et les $\mathbb{Z}_p$-systèmes locaux étales et les $\mathbb{Q}_p$-systèmes locaux sur les espaces algébriques et analytiques associés à l'anneau de base, ainsi que le lien entre la cohomologie (pro-)étale et la φ-cohomologie. Nous établissons aussi un lien critique avec la caractéristique mixte en exhibant une équivalence de catégories tensorielles entre les algèbres étales finies sur une algèbre de Banach parfaite arbitraire sur un corps non trivialement normé complet de caractéristique p, et les algèbres étales finies sur une $\mathbb{Q}_p$-algèbre de Banach correspondante. Ceci redonne l'homéomorphisme entre les groupes de Galois absolus de $\mathbb{F}_p((\pi))$ et de $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ donné par le corps des normes de Fontaine et Wintenberger, ainsi que des généralisations considérées par Andreatta, Brinon, Faltings, Gabber, Ramero, Scholl, et plus récemment Scholze. En utilisant le formalisme des espaces adiques de Huber et le formalisme des espaces perfectoïdes de Scholze, nous globalisons ces constructions afin de donner plusieurs descriptions des systèmes locaux étales sur des espaces analytiques sur des corps p-adiques. L'une de ces descriptions utilise une version relative de la courbe de Fargues-Fontaine.

CONTENTS