

**PERTURBATION SINGULIÈRE  
EN DIMENSION TROIS : CANARDS  
EN UN POINT PSEUDO-SINGULIER NŒUD**

PAR ÉRIC BENOÎT

---

RÉSUMÉ. — On étudie les systèmes différentiels singulièrement perturbés de dimension 3 du type

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z, \varepsilon), \\ \dot{y} = g(x, y, z, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{z} = h(x, y, z, \varepsilon), \end{cases}$$

où  $f, g, h$  sont analytiques quelconques. Les travaux antérieurs étudiaient les points réguliers où la surface lente  $h = 0$  est transverse au champ rapide vertical. C'est le domaine d'application du théorème de Tikhonov. Dans d'autres travaux antérieurs, on étudiait les singularités de certains types : plis et fronces de la surface lente, ainsi que certaines singularités plus compliquées, analogues aux points tournants en dimension inférieure : les points pseudo-singuliers cols. Génériquement, les seules singularités génériques non encore étudiées dans la littérature sont les points pseudo-singuliers nœuds.

Dans cet article, on étudie les points pseudo-singuliers nœuds où on montre l'existence d'une ou deux solutions surstables (c'est-à-dire assez régulières en  $\varepsilon$ ). Quand le rapport de deux valeurs propres est entier, un phénomène nouveau et intéressant apparaît : la résonance.

Techniquement, on se ramène d'abord à une forme plus canonique, puis on montre l'existence de solutions formelles, en utilisant le théorème des fonctions implicites sur un opérateur entre espaces de Banach de séries Gevrey. Les séries obtenues sont alors Gevrey, et les théories de sommation de ces séries donnent les solutions surstables recherchées.

---

*Texte reçu le 12 octobre 1999, accepté le 2 décembre 1999*

ÉRIC BENOÎT, Université de la Rochelle • *E-mail* : [ebenoit@univ-lr.fr](mailto:ebenoit@univ-lr.fr)

*Url* : <http://www.univ-lr.fr/intranetULR.html>

Classification mathématique par sujets (2000). — 34E15, 34M30, 34M60, 34E05, 34C20.

Mots clefs. — Canard, équation différentielle ordinaire, perturbation singulière, point tournant, série Gevrey, solution surstable.

ABSTRACT (*Singular perturbation, tridimensional case : canards on a pseudo-singular node point*)

We study singularly perturbed system of differential equations like

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z, \varepsilon), \\ \dot{y} = g(x, y, z, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{z} = h(x, y, z, \varepsilon), \end{cases}$$

where  $f$ ,  $g$  and  $h$  are analytic functions. In known papers, regular points of the slow surface  $h = 0$  are studied. At this point, the fast flow (vertical) is tranverse to the slow surface. The Tikhonov's theorem can be applied here. In other papers, fold points and cusps of the slow surface were studied. The list of generic singularities contains also the pseudo-singular points which are connected to the turning points in lower dimension. They are (generically) saddle, focus or node. In the neighborhood of focus points, nothing happens, the saddle were studied in their papers, but the node points were never studied in the litterature.

In this paper, we prove that generally, there exist two overstable (*i.e.* regular with respect  $\varepsilon$ ) solutions. When the ratio between two eigenvalues is an integer, a resonance appears, and one of the two overstable solutions disappears.

Technically, we transform first the system into a more canonical equation. After that, we prove the existence of formal solutions, and, using the implicit function theorem on Banach spaces of Gevrey series, we can prove that the formal solution is Gevrey. The theory of summation of Gevrey series gives the over-stable solutions.

## 1. Introduction

La plupart des travaux sur les perturbations singulières d'équations différentielles ordinaires concernent les cas où la dimension de la variable lente est 1. Ce sont les équations du type

$$\begin{cases} x' = f(x, z, \varepsilon), & x \in \mathbb{R}, \\ \varepsilon z' = h(x, z, \varepsilon), & z \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Les méthodes sont diverses : la géométrie avec les variétés invariantes (Dumortier, Roussarie, Jones [8]); l'analyse non standard (Benoît, Callot, Diener, Sari, *etc.*, [2], [10]); le calcul asymptotique classique avec *matching* (Wasow, Vasil'eva, O'Malley, . . . , [14]); l'ajout à cela d'un brin d'analyse complexe (méthode de Kruskal-Segur); les propriétés Gevrey des solutions formelles (Malgrange, Ramis, Sibuya, Écalle, . . . , [12], [7]), *etc.* Toutes ces méthodes ont bien sûr des atouts différents, et leur utilisation simultanée permet d'avancer plus loin dans certains problèmes.

Dans le cas où la dimension de la variable lente est strictement supérieure à 1,

$$\begin{cases} x' = f(x, z, \varepsilon), & x \in \mathbb{R}^p, \\ \varepsilon z' = h(x, z, \varepsilon), & z \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

certains travaux se généralisent : le théorème de Tikhonov, les résultats de Vasili'eva, *etc.*, mais ils font tous l'hypothèse que, le long des trajectoires lentes étudiées, le spectre de la partie linéaire du champ rapide évite zéro (ou même l'axe imaginaire). Ainsi, l'indice de stabilité des branches de variété lente ne change pas. Dans le cas contraire, les problèmes sont beaucoup plus délicats (généralisation des plis, et surtout des points tournants) et je ne connais pas de résultats généraux.

Dans [3], j'ai étudié certains problèmes apparaissant génériquement quand les dimensions lente et rapide sont respectivement 2 et 1. J'avais utilisé des méthodes géométriques et l'analyse non standard. Ces méthodes n'avaient pas permis de résoudre le problème dans d'autres cas. Dans cet article, je me propose de compléter cette étude en étudiant les cas génériques non encore connus.

Le système de base est donc :

$$(1) \quad \begin{cases} x' &= f(x, y, z, \varepsilon^2), \\ y' &= g(x, y, z, \varepsilon^2), \\ \varepsilon^2 z' &= h(x, y, z, \varepsilon^2). \end{cases}$$

Dans l'écriture ci-dessus, il peut sembler étrange d'avoir mis  $\varepsilon^2$  pour le petit paramètre. C'est pour simplifier la suite de la présentation.

Les méthodes géométriques non standard (voir [3], [4], [5]) ont donné sur ce type de systèmes un certain nombre de résultats généraux qui montraient l'importance des canards dans ces problèmes. Cependant, ils n'ont pas permis de répondre à une question fondamentale : l'existence de canards au voisinage d'un point pseudo-singulier de type nœud. Ce dernier point, résolu dans les pages qui suivent en utilisant des séries divergentes Gevrey a déjà été démontré simultanément et indépendamment par M. Wechselberger [15] à l'aide de méthodes géométriques utilisant des éclatements et des variétés centrales. Ce dernier, malgré l'utilisation de méthodes fondamentalement différentes, retrouve la nécessité des hypothèses de non résonance, et l'impossibilité de préciser le caractère global des canards.

**1.1. Énoncé du problème et hypothèses.** — Dans ce paragraphe, on reprend les définitions et notations de [3], [4], [5]. Dans ces anciens articles, le paramètre  $\varepsilon$  était considéré comme fixé, infinitésimal (au sens de l'analyse non standard). Ici, comme chez M. Wechselberger,  $\varepsilon$  est une variable qui tend vers zéro. Chez M. Wechselberger,  $\varepsilon$  reste réel positif, alors qu'ici, il sera tout d'abord formel, puis vivra dans des secteurs de  $\mathbb{C}$  ayant l'origine pour sommet.

Les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont supposées analytiques en  $x$ ,  $y$  et  $z$  sur un domaine de  $\mathbb{C}^3$ . Pour simplifier les énoncés, on supposera que ce domaine est  $\mathbb{C}^3$  tout entier. Encore pour simplifier, on supposera  $f$ ,  $g$  et  $h$  analytiques par rapport à leur quatrième variable. En fait, il suffirait de supposer qu'elles sont analytiques pour  $\varepsilon$  dans un certain secteur contenant l'axe réel positif et qu'elles ont un développement asymptotique Gevrey d'ordre approprié en  $\varepsilon$ .

La *surface lente* est la surface d'équation  $h(x, y, z, 0) = 0$ . En un point non situé sur la surface lente, le champ de vecteurs donné par (1) est presque vertical (la composante verticale tend vers l'infini quand  $\varepsilon$  tend vers zéro).

Les points génériques étudiés dans cet article sont les points où les hypothèses suivantes sont vérifiées ( $h_z$  désigne la dérivée partielle de  $h$  par rapport à  $z$ , les autres notations sont analogues) :

$$(2) \quad h = 0, \quad h_z = 0, \quad fh_x + gh_y = 0,$$

$$(3) \quad \mu \leq \lambda < 0,$$

$$(4) \quad \nabla h \neq 0, \quad h_{zz} \neq 0, \quad (f, g, h) \neq 0,$$

$$(5) \quad \frac{\mu}{\lambda} \notin \mathbb{N}.$$

Les égalités (2) caractérisent les points dits pseudo-singuliers. Les nombres  $\lambda$  et  $\mu$  seront définis précisément plus loin (voir le § 1.3); ce sont les valeurs propres du linéarisé d'un champ de vecteurs en dimension 2. Ils classifient les pseudo-singularités en cols, nœuds et foyers, les inégalités (3) caractérisent les points pseudo-singuliers nœuds. Les non-égalités (4) sont génériques et (5) est dite *hypothèse de non-résonance*. Elle est aussi générique et sera commentée dans la suite du travail.

En revenant à la problématique initiale des perturbations singulières, il est tout naturel de définir le *système réduit* par les équations :

$$(6) \quad \begin{cases} x' = f(x, y, z, 0), \\ y' = g(x, y, z, 0), \\ 0 = h(x, y, z, 0). \end{cases}$$

C'est l'objet vers lequel on voudrait voir « converger » le système (1). Cependant, si on le définit comme une équation algébro-différentielle, les solutions vivent toutes sur la surface lente, et la « convergence » ne peut pas être définie correctement. On adopte donc la

DÉFINITION 1.1 (voir [3]). — On appelle *candidat* toute concaténation de segments verticaux, solutions de  $\dot{z} = h(x, y, z, 0)$  et de solutions du champ de vecteurs défini sur la surface lente par le système réduit (6).

**1.2. Résultats.** — Il est facile de voir que la limite, quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, de n'importe quelle trajectoire du système (1) est un candidat. Ce théorème est énoncé proprement dans [3]. C'est une généralisation facile du théorème de Tikhonov qui combine sauts rapides, solutions lentes le long de la surface lente et passages sur le pli.

DÉFINITION 1.2. — Parmi les candidats, on définit les *candidats-canards* : ils contiennent des bouts de solutions du système réduit, tracés sur la surface lente,

d'abord sur une nappe *attractive* (où  $h_z < 0$ ), puis sur une nappe *répulsive* (où  $h_z > 0$ ).

Dans sa définition d'un système *contraint* (voir [13]), Takens avait volontairement éliminé ces candidats car il semblait peu probable qu'ils soient limites de trajectoires de (1) (d'ailleurs cette affirmation est « numériquement » exacte : quand  $\varepsilon$  est petit, il est très difficile de trouver numériquement des trajectoires voisines d'un candidat-canard). Si une famille  $\gamma_\varepsilon$  de trajectoires de (1) converge (au sens  $C^0$ ) vers un candidat-canard quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, on dit que  $\gamma_\varepsilon$  est un canard.

Au voisinage d'un point pseudo-singulier nœud, il y a beaucoup de candidats canards (voir [5] et la figure ci-dessous). Nous allons montrer dans la suite de l'article que seuls quelques-uns sont limites de canards de (1).

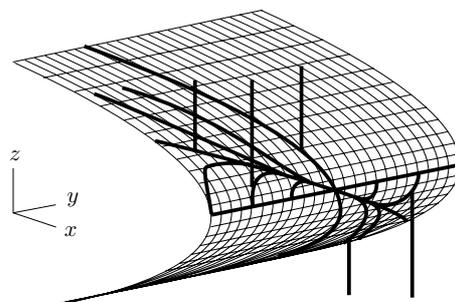


FIGURE 1. Quelques candidats-canards

Plus précisément, dans cet article, le théorème principal est le théorème 1.5 ci-dessous, mais la difficulté est concentrée dans le théorème 1.4. Mais il nous faut d'abord rappeler la définition des séries Gevrey, adaptée à notre problème :

DÉFINITION 1.3. — Une solution formelle de (1) notée

$$\hat{\gamma}(t) = \begin{cases} \hat{x}(t) = \sum_{n \geq 0} x_n(t) \varepsilon^n, \\ \hat{y}(t) = \sum_{n \geq 0} y_n(t) \varepsilon^n, \\ \hat{z}(t) = \sum_{n \geq 0} z_n(t) \varepsilon^n, \end{cases}$$

est dite *Gevrey-2* si les fonctions  $x_n$ ,  $y_n$  et  $z_n$  sont analytiques, au moins pour  $|t| < r$ , et si de plus, il existe des constantes  $\alpha$  et  $A$  telles que

$$\|x_n\|_{n/2}, \|x'_n\|_{n/2}, \|y_n\|_{n/2}, \|y'_n\|_{n/2}, \|z_n\|_{n/2}, \|z'_n\|_{n/2}$$

soient tous les six inférieurs à  $A\alpha^n \Gamma(\frac{1}{2}n + 1)$ , où  $\|\cdot\|_{n/2}$  désigne une norme de type Nagumo sur les fonctions analytiques, définie précisément plus loin (§ 5.1).