Bull. Soc. math. France
134 (3), 2006, p. 327–355

DISCRÉTISATION DE ZETA-DÉTERMINANTS D'OPÉRATEURS DE SCHRÖDINGER SUR LE TORE

PAR LAURENT CHAUMARD

RÉSUMÉ. — Nous donnons ici deux résultats sur le déterminant ζ-régularisé $\det_\zeta A$ d'un opérateur de Schrödinger $A = \Delta_g + V$ sur une variété compacte $\mathcal{M}$. Nous construisons, pour $\mathcal{M} = S^1 \times S^1$, une suite (G_n, ρ_n, Δ_n) où G_n est un graphe fini qui se plonge dans $\mathcal{M}$ via ρ_n de telle manière que $\rho_n(G_n)$ soit une triangulation de $\mathcal{M}$ et où Δ_n est un laplacien discret sur G_n tel que pour tout potentiel V sur $\mathcal{M}$, la suite de réels $\det(\Delta_n + V)$ converge après renormalisation vers $\det_\zeta(\Delta_g + V)$. Enfin, nous donnons sur toute variété riemannienne compacte $(\mathcal{M}, g)$ de dimension inférieure ou égale à 3 et de groupe d'isométries transitif, un majorant du déterminant $\det_\zeta(\Delta_g + V)$, lorsque le potentiel V est positif.

ABSTRACT (*Discretisation of Schrodinger operators on torus*). — We propose two results concerning the ζ-regularised determinant $\det_\zeta A$ of a Schrödinger operator $A = \Delta_g + V$ on a compact riemannian manifold $(\mathcal{M}, g)$. For $\mathcal{M} = S^1 \times S^1$, we construct a sequence (G_n, ρ_n, Δ_n) where G_n is a finite graph injected in $\mathcal{M}$ via ρ_n, in such a way that $\rho_n(G_n)$ triangulates $\mathcal{M}$. Δ_n is a discrete laplacian on G_n so that for every potential V on $\mathcal{M}$, the sequence $\det(\Delta_n + V)$ converges, after normalisation, to $\det_\zeta(\Delta_g + V)$. Last, we give on every riemannian compact manifold $(\mathcal{M}, g)$ whose dimension is less than or equal to 3 and with a transitiv isometry group, the maximum of the determinant $\det_\zeta(\Delta_g + V)$.

Texte reçu le 19 octobre 2004, accepté le 11 avril 2005.

LAURENT CHAUMARD, Lycée Joffre, 150, allée de la Citadelle, 34000 Montpellier (France).
E-mail : `chaumard@no-log.org`

Classification mathématique par sujets (2000). — 53B21, 53C24,94C15, 53A35, 58J40, 58J50.

Mots clefs. — Déterminant zeta-régularisé, théorie spectrale des graphes et des surfaces, discrétisation, fonction zeta, opérateur de Schrödinger, opérateurs pseudo-différentiels, géométrie Riemannienne.

1. Introduction

Dans les années 1970, D.B. Ray et I.M. Singer [14] ont proposé une approche originale de l'étude du spectre des opérateurs de Schrödinger sur une variété compacte, en définissant une fonctionnelle $\det_\zeta$, régularisation du produit des valeurs propres d'un tel opérateur A, par la formule

$$\det_\zeta A := \exp\Big\{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}_{|s=0}\zeta_A(s)\Big\} \quad \text{où} \quad \zeta_A(s) := \mathrm{Trace}_{L_2} A^{-s}.$$

Cet invariant spectral s'avèrera rapidement non trivial, et B. Osgood, R. Phillips, P. Sarnak [12] mettront en lumière l'information géométrique qu'il contient en prouvant qu'il fournit une nouvelle démonstration du théorème d'uniformisation des surfaces, ainsi que des résultats de pré-compacité d'ensembles isospectraux de métriques en dimension 2 [11].

M. Pollicott, A.C. Rocha [13] établiront ensuite une expression, pour des métriques g de courbure -1 en dimension 2, de ${\det_\zeta}'\Delta_g$ en fonction du spectre des longueurs de g, mettant ainsi en exergue les qualités dynamiques du déterminant. Plus récemment, K. Okikiolu [10] a obtenu, en dimension impaire, des formules de variations premières et secondes en fonction du facteur conforme de la métrique, du déterminant du laplacien conforme.

Nous nous intéresserons à l'étude de la dépendance de $\det_\zeta(\Delta_g + V)$ par rapport au potentiel V, en dimension 2 ou 3, via deux approches distinctes.

Maximum de $\det_\zeta(\Delta_g + V)$

Le premier résultat établit sous certaines conditions topologiques et géométriques l'existence et l'unicité d'un maximum du déterminant de $\det_\zeta\big(\Delta_g + V\big)$ lorsque V varie.

Théorème 1.1. — *Soit $(\mathcal{M}^m, g)$ une variété riemannienne compacte sans bord. Soit $V \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}^+)$ un potentiel non nul. Posons*

$$v_0 := \frac{1}{\mathrm{Vol}_g(\mathcal{M})}\int_{\mathcal{M}} V\,\mathrm{d}v_g.$$

Alors :

1) *Si $m \le 3$ et le groupe d'isométries de g agit de manière transitive sur $\mathcal{M}$, alors on a*

$$\det_\zeta\big(\Delta_g + V\big) \le \det_\zeta\big(\Delta_g + v_0\big)$$

avec égalité si et seulement si V est un potentiel constant.

2) *Si $\mathcal{M} = S^2$ ou $S^1 \times S^1$, soit $\varphi : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$, telle que la métrique $\mathrm{e}^{2\varphi}g$ soit de courbure constante et de même volume que g. Nous avons l'inégalité*

$$F_g\big(V\big) \le F_g\big(v_0\mathrm{e}^{2\varphi}\big) \quad \text{où} \quad F_g(V) := \exp\Big\{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{M}}\varphi V\,\mathrm{d}v_g\Big\}\det_\zeta(\Delta_g + V),$$

le cas d'égalité n'étant réalisé que si le potentiel $V\mathrm{e}^{-2\varphi}$ *est constant.*

L'idée de la démonstration est relativement simple ; il s'agira de prouver que sous nos hypothèses topologiques, le déterminant est une fonctionnelle log-concave du potentiel et que pour les métriques étudiées dans le premier point, le noyau de la différentielle du logarithme du déterminant calculée en un potentiel constant est l'hyperplan des potentiels d'intégrale nulle. Le cas général sera obtenu par une généralisation de la formule de Polyakov.

On remarque en particulier que sous les hypothèses métriques du cas 1), les potentiels constants sont spectralement rigides. Enfin, en dimension inférieure à 3, à cause de la stricte log-concavité, et indépendamment de la métrique, il n'existe aucune déformation isospectrale C^∞ de potentiels.

Des déterminants de graphe vers $\det_\zeta$

L'approche discrète de l'invariant spectral $\det_\zeta$ prend tout son sens à la lumière à la fois des liens forts qu'il existe entre les quantités spectrales des graphes et celles des variétés, et de la simplicité, au moins dans sa définition, du déterminant d'un opérateur de Schrödinger discret. Précisément, il serait intéressant d'établir, pour un opérateur de Schrödinger A sur une variété compacte $\mathcal{M}$, s'il existe une suite de graphes $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de sommets notés $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et d'opérateurs de Schrödinger $A_n : \mathbb{R}^{S_n} \to \mathbb{R}^{S_n}$, de préférence explicites, tels que la suite $(\det A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\det_\zeta A$.

Ce problème a été résolu en dimension 1 par D. Burgheela, L. Friedlander, T. Kappeler [1], R. Forman [7] et Y. Colin De Verdière [4]. Notons $\mathcal{M} = [0,T]$ et G_n le graphe linéaire à n sommets vu comme une discrétisation de $\mathcal{M}$. Soit un opérateur de Sturm-Liouville $A = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + V(t)$ sur $[0,T]$, auquel on associe, par la méthode des éléments finis la plus naturelle qui soit, une suite d'opérateurs différentiels discrets $A_n : \mathbb{R}^{S_n} \to \mathbb{R}^{S_n}$. Les auteurs ci-dessus montrent qu'après normalisation, les déterminants discrets convergent vers $\det_\zeta A$:

THÉORÈME 1.2 (cf. [1], [7] et [4]). — *Il existe une constante c, ne dépendant que des conditions au bord, telle que*

$$\frac{\det A_n}{n^{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} c \det_\zeta A. \tag{1}$$

Plus précisément, est prouvée la convergence vers le déterminant de Feynman de A, défini par

$$\det_F A := \det\big(v \in \mathbb{R}^p \to Y_v(T)\big),$$

où $Y_v : [0,T] \to \mathbb{R}^p$ est l'unique fonction vérifiant

$$A(Y_v) = 0 \text{ sur } [0,T], \quad Y_v(0) = 0, \quad Y_v'(0) = v. \tag{2}$$

La proportionnalité entre le déterminant de Feynman et le déterminant ζ-régularisé est démontrée dans [7]. Cette formule s'avère à la fois étonnante et très utile, puisqu'elle permet de contourner l'obstacle majeur dans l'étude de

$\det_\zeta$, à savoir la régularisation nécessaire à sa définition. En effet, $\det_F$ n'est finalement que le déterminant d'une matrice d'ordre p.

Notons que les auteurs des articles [1] et [4] prouvent que dans le cas des graphes linéaires, le déterminant de A_n est également proportionnel à la valeur au bord d'un vecteur du noyau de A_n, pendant discret de (2). Après le calcul de ce facteur de proportionnalité, ils concluent en utilisant le fait qu'une approximation du type Euler de cette équation différentielle converge vers la solution continue. R. Forman [7] prouve quant à lui indépendamment de (2) que $\det A_n/n^{2n}$ converge vers le déterminant ζ-régularisé.

Nous proposons ici un résultat similaire en dimension 2.

Théorème 1.3. — *Soit $\mathcal{M} = S^1 \times S^1$ le tore de dimension 2 muni d'une métrique riemannienne g. Alors, il existe*

- *une suite de triangulations $(G_n)_{n\in\mathbb{N}} = (S_n, E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}$ ne dépendant que de la classe conforme de g,*
- *une suite d'opérateurs laplaciens explicites $(\Delta_n : \mathbb{R}^{S_n} \to \mathbb{R}^{S_n})_{n\in\mathbb{N}}$, discrétisés de Δ_g par une méthode des éléments finis,*

telles que pour toute fonction C^∞ positive V non identiquement nulle sur $\mathcal{M}$,

$$\frac{\det(\Delta_n + V)}{\det(\Delta_n + v_0)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\det_\zeta(\Delta_g + V)}{\det_\zeta(\Delta_g + v_0)} \exp\Big\{-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{M}} K_g \Delta_g^{-1}(V - v_0)\,\mathrm{d}v_g\Big\},$$

où $v_0 := 1/\mathrm{Vol}_g(\mathcal{M})\int_{\mathcal{M}} V\,\mathrm{d}v_g$ et $K_g : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ est la courbure de Gauss de g.

Le schéma de preuve reprend l'approche variationnelle de [7]. Nous utiliserons les formules sur la différentielle du déterminant des opérateurs de Schrödinger obtenus dans la partie 2. Posons pour tout t dans $[0,1]$,

$$A_t := \Delta_g + v_0 + V_t, \quad \text{où} \quad V_t := t(V - v_0),$$

et définissons, pour chaque t, $(A_{t,n})_{n\geq 3}$ la suite des discrétisés de A_t. Soient ψ_n et ψ les fonctions C^∞ définies sur un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $[0,1]$ par

$$\psi_n(t) := \ln\det A_{t,n} \quad \text{et} \quad \psi(t) := \ln\det_\zeta A_t.$$

R. Forman prouve que la suite (ψ_n') converge uniformément vers ψ' sur $[0,1]$. Il dispose pour cela d'une formule de variation première qui, pour des raisons que nous verrons par la suite, n'est plus valable en dimension 2. C'est pourquoi nous nous intéresserons aux dérivées secondes. Dans le cas où la courbure de g est nulle, le théorème 1.3 est ainsi une conséquence de la convergence uniforme de ψ_n' vers ψ' sur $[0,1]$, qui sera obtenue à partir des deux propriétés suivantes :

$$\sup_{[0,1]}|\psi_n'' - \psi''| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \psi_n'(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \psi'(0). \tag{3}$$

Pour une métrique g quelconque sur $\mathcal{M}$, nous nous ramènerons au cas précédent grâce au théorème d'uniformisation des surfaces et au corollaire 3.2, généralisation de la formule de Polyakov.

Dans la partie 2, nous démontrons une formule de variation seconde du logarithme du déterminant. Dans la partie 3, nous démontrons le théorème 1.1, et dans la dernière partie le théorème 1.3.

2. Les dérivées secondes du déterminant

Dans cette partie, $(\mathcal{M}, g)$ sera une variété riemannienne compacte sans bord de dimension m, V sera un potentiel positif non identiquement nul et nous poserons

$$v_0 := \frac{1}{\mathrm{Vol}_g(\mathcal{M})} \int_{\mathcal{M}} V \,\mathrm{d}v_g.$$

Enfin, pour tout $t \in [0,1]$, nous considèrerons l'opérateur de Schrödinger

$$A_t := \Delta_g + V_t,$$

où $V_t := v_0 + t(V - v_0)$. Nous notons I un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $[0,1]$ tel que A_t est injectif pour tout $t \in I$. L'opérateur dérivé de A_t sera noté

$$\mathcal{V} : f \in L^2(\mathcal{M}) \longmapsto (V - v_0) f \in L^2(\mathcal{M}).$$

LEMME 2.1. — *Pour tout complexe z et tout $t_0 \in I$, l'opérateur $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{|t=t_0}(A_t^z)$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $2p-2$ pour tout p strictement plus grand que la partie réelle de z.*

Démonstration. — Plaçons-nous dans une carte de la variété afin de nous ramener à un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Si l'on note a_0, a_1 et a_2 les trois composantes homogènes en $(\xi, \lambda^{\frac{1}{2}})$ du symbole total de $A - \lambda\,\mathrm{Id}$, nous avons

$$\begin{aligned}
a_2(x,\xi,\lambda) &= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}(x)\xi_i\xi_j - \lambda,\\
a_1(x,\xi,\lambda) &= -\frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i,j=1}^{m} \xi_j \;\mathrm{d}_x(g^{ij}\sqrt{G}\,)\cdot \xi_i,\\
a_0(x,\xi,\lambda) &= v_0 + tV_1(x) = v_0 + t(V(x) - v_0),
\end{aligned}$$

où $(g^{ij}(x))_{1\le i,j\le m}$ est la matrice de la métrique induite par g sur $(T_x\mathcal{M})^*$, lue dans la carte, et $G = \det g^{ij}$.

Notons maintenant $b^0_{-2-j,t}(x,\xi,\lambda)$, pour $j = 0,1,2,\ldots$, les composantes homogènes d'un développement asymptotique du symbole d'un paramétrix de $A_t - \lambda\,\mathrm{Id}$ (le premier indice étant le degré d'homogénéité de ce coefficient en