Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DENSITÉ DES FRIABLES

Régis de La Bretèche & Andrew Granville

Tome 142
Fascicule

2014

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 303-348

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule , tome 142, 2014

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)

Abonnement Europe : 300 €, hors Europe : 334 € ($ 519)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Bull. Soc. math. France
142, 2014, p. 303–348

DENSITÉ DES FRIABLES

PAR RÉGIS DE LA BRETÈCHE & ANDREW GRANVILLE

RÉSUMÉ. — Nous étudions l'asymptotique des fonctions sommatoires restreintes aux entiers friables de suites complexes en utilisant la méthode du cercle et des estimations précises sur les sommes d'exponentielles sur les friables. Les méthodes développées nous permettent d'obtenir une estimation du cardinal des couples de y-friables dont la somme est encore y-friable et, sous des hypothèses usuelles dans le crible, une estimation des fonctions sommatoires restreintes aux entiers friables.

ABSTRACT (*Friable Density*). — We study the asymptotic behaviour of summatory functions of complex sequences over friable integers. We use the circle method and estimates for exponential sums over friable integers. Our method leads to an estimate for the number of pairs of y-friable integers such that their sum is also y-friable. Assuming standard hypothesis of sieve theory, we obtain also an estimate for summatory functions over friable integers.

RÉGIS DE LA BRETÈCHE, IMJ-PRG, UMR 7586 Université Paris Diderot, UFR de Mathématiques, Case 7012, Bâtiment Sophie Germain 75205 Paris cedex 13, France • *E-mail :* `regis.de-la-breteche@imj-prg.fr`

ANDREW GRANVILLE, Département de Mathématiques et Statistique, Université de Montréal, CP 6128 succ Centre-Ville, Montréal, QC H3C 3J7, Canada • *E-mail :* `andrew@dms.umontreal.ca`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11N25, 11N35, 11N36, 11P55, 11N56, 11D85.

Mots clefs. — Entiers friables, méthode de cercle, crible, sommes exponentielles, équations diophantiennes.

1. Introduction

Un entier n est dit y-friable si son plus grand facteur premier, noté $P(n)$, est $\leqslant y$. Dans [11], Lagarias et Soundararajan étudient l'équation $a+b=c$ lorsque a, b, c sont y-friables. Dans l'article de survol [10], ils exposent les enjeux de cette étude et notamment les liens avec la conjecture *abc*.

En supposant l'hypothèse de Riemann généralisée aux fonctions L de Dirichlet, ils obtiennent une estimation de $N_\Phi(x,y)$ avec

$$N_\Phi(x,y) := \sum_{\substack{(a,b,c)\in\mathbb{N}^3\\ a+b=c\\ P(abc)\leqslant y}} \Phi\Big(\frac{a}{x}\Big)\Phi\Big(\frac{b}{x}\Big)\Phi\Big(\frac{c}{x}\Big)$$

lorsque $x \geqslant 2$, $(\log x)^{8+\varepsilon} < y \leqslant \exp\{(\log x)^{1/2-\varepsilon}\}$ où $\varepsilon > 0$ et Φ est une fonction C^∞ à suppport compact inclus dans $]0,+\infty[$. Leur étude fournit ainsi une minoration du cardinal

$$N(x,y) := \mathrm{card}\{(a,b,c)\in S(x,y)^3 \ : \quad a+b=c\},$$

où $S(x,y)$ désigne l'ensemble des entiers $\leqslant x$ qui sont y-friables.

Dans [5], Drappeau complète leur étude en obtenant un équivalent de $N(x,y)$. Afin de citer son résultat, nous notons $\alpha=\alpha(x,y)$ le point-selle l'unique solution positive de l'équation

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{p^\alpha-1} = \log x.$$

Posant

$$\sigma_0(\alpha) := \alpha^3 \iint_{0<t_1,t_2,t_1+t_2<1} (t_1t_2(t_1+t_2))^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2,$$
$$\sigma_1(\alpha) := \prod_p \Big(1+\frac{p-1}{p(p^{3\alpha-1}-1)}\Big(\frac{p-p^\alpha}{p-1}\Big)^3\Big),$$

il montre, conditionnellement à l'hypothèse de Riemann généralisée, lorsque (x,y) satisfait $(\log x)^{8+\varepsilon} \leqslant y \leqslant \exp\big\{(\log x)/(\log\log x)^{1+\varepsilon}\big\}$ et que x tend vers $+\infty$, l'équivalent

$$N(x,y) \sim \sigma_0(\alpha)\sigma_1(\alpha)\frac{\Psi(x,y)^3}{x},$$

où $\Psi(x,y) := \mathrm{card}\{S(x,y)\}$. En particulier, lorsque $\log\log x/\log y$ tend vers 0, il vient, sous l'hypothèse de Riemann généralisée,

$$N(x,y) \sim \frac{\Psi(x,y)^3}{2x}. \tag{1.1}$$

Ainsi, il est naturel de conjecturer que cet équivalent est valable si, et seulement si, $\log\log x/\log y$ tend vers 0.

Nous nous proposons d'estimer inconditionnellement $N(x,y)$ compte-tenu des connaissances actuelles sur la région sans zéro des fonctions L de Dirichlet. Nous notons systématiquement $u := (\log x)/(\log y)$. L'enjeu est d'établir (1.1) inconditionnellement dans un large domaine.

THÉORÈME 1.1. — *Lorsque* (x,y) *satisfaisant à*

$$x \geqslant 2, \quad \exp\{(\log x)^{2/3+\varepsilon}\} \leqslant y \leqslant x, \tag{1.2}$$

nous avons

$$N(x,y) = \frac{\Psi(x,y)^3}{2x}\Big(1 + O\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big).$$

REMARQUES

1. Le résultat obtenu est beaucoup plus précis mais nous avons préféré énoncer dans l'introduction ce résultat qualitatif. Dans la section 5, nous donnerons une estimation avec un terme d'erreur plus précis qui fera apparaître la contribution de l'éventuel zéro de Siegel (cf. le lemme 5.5).
2. Le cardinal $N(x,y)$ peut être évalué asymptotiquement grâce à [4] avec un terme d'erreur
$$O\Big(\frac{\log(u+1)}{\varrho(u)\log y}\Big)$$
ce qui fournit un équivalent pour $N(x,y)$ uniquement dans un sous-domaine de la forme
$$x \geqslant x_0(\varepsilon), \qquad \exp\Big\{\frac{(\log x)(\log\log\log x)}{\varepsilon\log\log x}\Big\} \leqslant y \leqslant x, \tag{1.3}$$
relatif à $\varepsilon \in]0,1[$. L'estimation du théorème 1.1 lorsque u est borné découle donc de [4].

Nous étendons notre étude à l'étude de la taille de

$$A(x,y) := \sum_{n\in S(x,y)} a_n,$$

où $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. La méthode utilisée pour estimer $A(x,y)$ reprend celle développée par le premier auteur dans [4]. Elle emploie la méthode du cercle grâce à la formule

$$A(x,y) = \int_0^1 A_\vartheta(x)E(x,y;-\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta, \tag{1.4}$$

avec

$$A_\vartheta(x) := \sum_{n\leqslant x} a_n\mathrm{e}(n\vartheta), \quad E(x,y;\vartheta) := \sum_{n\in S(x,y)} \mathrm{e}(n\vartheta) \qquad \mathrm{e}(t) := \mathrm{e}^{2\pi it}.$$