RUDIMENTS DE DYNAMIQUE HOLOMORPHE

François Berteloot, Volker Mayer

Résumé. — Ce livre est une introduction à l'itération rationnelle. Les aspects les plus classiques de cette théorie font l'objet des quatre premiers chapitres. On y passe en revue les propriétés essentielles des ensembles de Julia et de leurs complémentaires les ensembles de Fatou avec, comme point d'orgue, la classification des composantes de Fatou périodiques et le théorème de non-errance de Sullivan. La seconde partie du livre présente quelques thèmes plus spécifiques. Deux classes d'exemples sont d'abord étudiées : les fractions chaotiques et les fractions hyperboliques. Les derniers chapitres sont plus ouverts ; l'étude des familles holomorphes de fractions rationnelles met en perspective le célèbre problème de Fatou sur la densité des fractions hyperboliques, quant à l'exposé des méthodes potentialistes, il effleure les aspects ergodiques et prépare aux généralisations en dimension supérieure.

Certains des développements traités le sont pour la première fois sous forme de livre et plusieurs démonstrations sont originales.

Abstract **(An introduction to holomorphic dynamics).** — This book is an introduction to rational iteration theory. In the first four chapters we deal with the classical theory. The basic properties of the Julia set and its complement the Fatou set are presented; the highest points of our treatment being the classification of the components of the Fatou set and Sullivan's non-wandering theorem. The second part of the book is consecrated to the study of several topics in more detail. We begin by considering at length two classes of rational maps: the chaotic maps and the hyperbolic maps. In the closing chapters we include respectively a study of holomorphic families of rational maps with a view to discussing Fatou's famous problem concerning the density of hyperbolic maps and an exposition of the methods of potential theory, touching on questions of ergodicity, which may serve as a preparation for generalizations in higher dimensions.

A number of the developments treated in this text appear for the first time in book form and we present several original proofs.

F. Berteloot, Laboratoire de Mathématiques Émile Picard, CNRS UMR 5580, Université Paul Sabatier (Toulouse III), 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 04 • *E-mail :* `berteloo@picard.ups-tlse.fr`

V. Mayer, UFR de Mathématiques, CNRS UMR 8524, Université de Lille I, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex • *E-mail :* `volker.mayer@univ-lille1.fr`

Classification mathématique par sujets **(2000).** — 37F50, 37F15, 30C62, 37F45, 37A25, 31A05.

Mots clefs. — Ensemble de Julia, ensemble de Fatou, méthodes quasiconformes, théorème de non-errance de Sullivan, hyperbolicité, dimension de Hausdorff, familles holomorphes, mesure de Green.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Ce texte est la rédaction d'un cours de DEA donné par les auteurs à l'Université de Lille I en 1997-98. Il s'agit d'un livre d'introduction dont les objectifs sont, d'une part d'offrir un panorama complet des aspects les plus classiques de l'itération rationnelle et, d'autre part, d'en esquisser les développements récents dans des directions choisies.

Les quatre premiers chapitres du livre en constituent le socle. Ils synthétisent les résultats fondamentaux de la théorie en s'achevant par la classification de Fatou-Cremer et le théorème de non-errance de Sullivan. Les chapitres restants sont indépendants les uns des autres ; ils traitent de questions choisies pour l'éclairage apporté sur certains aspects de la théorie. Trois d'entre eux sont dévolus à l'étude de familles spécifiques de fractions rationnelles et à celle des perturbations holomorphes d'une fraction rationnelle donnée. Le dernier concerne les méthodes potentialistes.

Bon nombre de thèmes traités ici le sont aussi dans l'abondante littérature consacrée au sujet. Nous signalons cependant l'originalité de certains développements comme les démonstrations des théorèmes de Picard ou Montel et du théorème de Fatou (densité des cycles répulsifs) par renormalisation, la construction d'exemples de fractions rationnelles chaotiques, l'abord de la géométrie des ensembles de Julia hyperboliques et des questions de rigidité ou, enfin, la description des méthodes potentialistes.

Au plan du style, nous avons cherché à concilier les objectifs de concision, « d'auto-suffisance » et de précision. Pour l'essentiel, les démonstrations ne reposent que sur les techniques classiques d'analyse complexe traditionnellement enseignées en second cycle. Certains passages requièrent cependant des connaissances plus sophistiquées ; celles-ci sont présentées sous forme d'appendices.

Ce texte devrait donc aussi bien intéresser les futurs thésards désirant s'initier à la dynamique holomorphe que les étudiants de maîtrise ou les agrégatifs soucieux d'étoffer leurs connaissances en analyse complexe.

Passons maintenant à une description plus fouillée qui pourra servir de guide de lecture.

Les faits fondamentaux de la théorie des familles normales seront autant d'outils constamment utilisés dans ce livre. Ils sont redémontrés, dès le début du premier chapitre, grâce à l'efficace méthode des renormalisations de Zalcman. De ce point de vue, l'important est de savoir comment rendre normale une famille qui ne l'est pas. Cette approche est en rupture avec celle de Montel et le renouveau qu'elle apporte à la théorie des familles normales se doit d'être souligné. À la fin du premier chapitre, nous dégageons la traditionnelle dichotomie entre l'ensemble de Julia (partie de la sphère de Riemann où le comportement de la suite des itérées d'une fraction rationnelle est « chaotique ») et son complémentaire l'ensemble de Fatou. Les objets de l'étude à venir sont alors définis.

Nous commençons, avec le second chapitre, par nous intéresser à l'ensemble de Fatou. Notre but est de décrire cinq types de composantes connexes stables de cet ensemble : les bassins attractifs, super-attractifs, les bassins paraboliques, les disques de Siegel et les anneaux de Herman. Nous analysons les dynamiques induites sur ces composantes ainsi que celles de points critiques associés. Ces renseignements s'avéreront cruciaux pour la compréhension de la dynamique globale. L'existence des disques de Siegel et des anneaux de Herman est établie (celle des autres types de composantes étant immédiate). On montrera dans le quatrième chapitre que toute composante connexe invariante de l'ensemble de Fatou est de l'un de ces cinq types ; ceci achèvera la classification dite de Fatou-Cremer. Toute cette étude repose sur la problématique plus vaste de la linéarisabilité des germes de fonctions holomorphes au voisinage d'un point fixe. Les énoncés relatifs à ces aspects locaux sont structurés de façon à former un ensemble autonome.

Le troisième chapitre est consacré à l'ensemble de Julia. Nous commençons par établir que les cycles répulsifs en constituent une partie dense. C'est l'un des premiers résultats de la théorie, on en connaît maintenant plusieurs preuves. Nous présentons ici celle de Fatou puis une preuve directe basée sur le lemme de renormalisation de Zalcman. La preuve de Fatou, bien plus longue, a néanmoins le mérite de laisser entrevoir l'importance de la dynamique des points critiques (ici on majore facilement le nombre de cycles attractifs en fonction du degré). Nous avons ensuite cherché à illustrer l'extraordinaire diversité géométrique des ensembles de Julia. La question de la connexité est liée, en ce qui concerne la famille quadratique $P_c(z) = z^2 + c$, au célèbre ensemble de Mandelbrot. Il s'avère en effet que l'ensemble de Julia de P_c est un ensemble de Cantor lorsque c est situé hors de l'ensemble de Mandelbrot tandis qu'il est connexe dans le cas contraire. Cela souligne à nouveau l'importance de la dynamique critique puisque l'appartenance de c à l'ensemble de Mandelbrot signifie que l'orbite critique $(0 \mapsto c \mapsto c^2 + c \mapsto \cdots)$ est bornée. Le chapitre se termine par un exemple de polynôme dont l'ensemble de Julia est connexe mais non localement connexe.

Nous revenons à l'ensemble de Fatou au quatrième chapitre. Comme nous l'avons déjà annoncé, nous y établissons tout d'abord la classification de Fatou-Cremer. Le reste du chapitre est occupé par la preuve du théorème de non-errance de Sullivan. Celle-ci repose sur les techniques quasi-conformes et l'un des appendices est conçu pour en faciliter la lecture. Ces techniques jouent un rôle primordial dans les développements actuels de la théorie. Ce résultat fondamental stipule que toute composante connexe de l'ensemble de Fatou est envoyée, par une itérée assez grande, sur une composante périodique. Compte tenu des résultats du second chapitre, la dynamique sur l'ensemble de Fatou est alors bien comprise.

Dans le cinquième chapitre, nous présentons plusieurs classes de fractions rationnelles chaotiques, c'est-à-dire dont l'ensemble de Fatou est vide. Les premiers exemples furent exhibés par Lattès ; ils sont induits sur la sphère de Riemann par une dilatation de tore complexe au moyen d'une fonction elliptique (par exemple la fonction $\wp$ de Weierstrass). Il est facile de vérifier que les orbites critiques d'un exemple de Lattès sont captées par des cycles sans être cycliques ; on parle alors de fraction rationnelle strictement critiquement finie. En fait, de telles fractions rationnelles sont toujours chaotiques. Il est instructif de déduire cette observation du théorème de Sullivan et des dynamiques critiques associées aux composantes stables de l'ensemble de Fatou. Nous en donnons également une démonstration directe basée sur un argument de Fatou. Nous terminons par l'étude de la famille de Lyubich : $f_w(z) = 1 - w/z^2$. Pour de nombreuses valeurs du paramètre, f_w est chaotique et, cette fois, l'orbite critique $(0 \mapsto \infty \mapsto 1 \mapsto 1 - w \mapsto \cdots)$ est dense dans la sphère de Riemann.

Les fractions rationnelles hyperboliques sont abordées au sixième chapitre. Par définition, les dérivées des itérées de ces fractions explosent exponentiellement et uniformément sur l'ensemble de Julia. Des itérées convenablement choisies agissent alors comme de véritables loupes de puissances arbitraires. C'est cette propriété qui, formalisée, permet d'analyser la structure de ces ensembles de Julia. On notera que l'hyperbolicité se lit également sur les orbites critiques ; celles-ci ne doivent pas « polluer » l'ensemble de Julia. L'importance de ces fractions avait déjà été reconnue par Fatou et leur densité dans l'espace des fractions rationnelles conjecturée. Ce problème, encore ouvert de nos jours, est l'objet de recherches parmi les plus avancées. Ici, on s'intéressera surtout aux propriétés géométriques des ensembles de Julia de fractions hyperboliques. En établissant que ces ensembles sont poreux, nous en majorons la dimension de Hausdorff. Nous montrons aussi qu'ils ne possèdent en général pas de « tangentes ».

Le septième chapitre jette les bases de la théorie de Mañé-Sad-Sullivan. Il s'agit de voir comment, dans une famille de fractions rationnelles, les propriétés dynamiques, ou même les ensembles de Julia, « évoluent » en fonction d'un paramètre holomorphe. Ce chapitre fait écho à plusieurs passages importants du livre et, de plus, donne au lecteur l'occasion d'utiliser nombre de résultats précédemment démontrés. Une bonne partie peut en être lue en pensant à la famille quadratique $P_c(z) = z^2 + c$. La notion de J-stabilité concerne l'effet du paramètre sur les orbites critiques ; elle était implicitement utilisée dans l'étude de la famille de Lyubich. Nous la formalisons et en donnons plusieurs caractérisations. En admettant le λ-Lemma, nous montrons qu'autour d'une valeur J-stable du paramètre, l'ensemble de Julia varie holomorphiquement. Le reste du chapitre traite de l'impact de cette théorie sur le problème de la densité des fractions rationnelles hyperboliques. Le concept de composante hyperbolique est dégagé. Pour la famille quadratique $P_c(z) = z^2 + c$, cela signifie que, pour une composante connexe de l'intérieur de l'ensemble de Mandelbrot, les polynômes sont simultanément hyperboliques ou non. Pour cette même famille, la question de la densité des fractions hyperboliques est ramenée à l'importante conjecture suivante : seuls les exemples de Lattès possèdent des champs de droites mesurables invariants. Un cas particulier de cette conjecture est traité.

Le dernier chapitre traite des aspects potentialistes du point de vue des méthodes multi-dimensionnelles. Pour une fraction rationnelle donnée, on construit une mesure positive invariante, supportée par l'ensemble de Julia et reflétant les propriétés dynamiques de la fraction. En fait, les potentiels locaux de cette mesure sont induits par une fonction de Green attachée au bassin d'attraction d'un relevé polynomial de la fraction à $\mathbb{C}^2$. Nous montrons que les cycles et les préimages des points non exceptionnels sont équidistribués pour cette mesure. Cette approche a le double mérite de simplifier l'approche classique et d'être adaptable en dimension supérieure. Notre rédaction est conçue pour faciliter l'abord de ces généralisations.

Ce texte reste loin d'offrir un reflet fidèle des développements modernes de la théorie. Certains thèmes, recélant plus de difficultés techniques, ne sont pas abordés et d'autres sont tronqués. Le lecteur pourra poursuivre les pistes ouvertes en utilisant les ouvrages plus avancés ou les articles spécialisés auxquels nous faisons référence. Les notes de fin de chapitre précisent « l'histoire » de certains théorèmes et décrivent succinctement quelques-uns des résultats qui n'étaient qu'effleurés dans le livre. Les références qu'elles contiennent aideront également le lecteur à se frayer un chemin dans la littérature consacrée au sujet.

C'est avec grand plaisir que nous remercions nos collègues X. Buff, J. Duval, V. Guedj, N. Sibony et M. Zinsmeister pour nous avoir suggéré plusieurs améliorations et relevé nombre d'erreurs de la première version. C. Dupont nous a également signalé plusieurs coquilles, nous l'en remercions.

Les représentations graphiques sont réalisées à l'aide du logiciel généreusement mis à la disposition du public par C.T. McMullen sur son serveur internet.

CHAPITRE I

LA DICHOTOMIE DYNAMIQUE DE FATOU ET JULIA

Nous plantons ici le décor des chapitres à venir. Pour cela nous décrivons les propriétés élémentaires des objets à étudier et introduisons outils fondamentaux et concepts de base. C'est afin de rendre cette introduction aussi brève que possible que nous n'avons qu'esquissé certaines preuves ; nous renvoyons aux ouvrages de A. Beardon [**1.Bea**] ou N. Steinmetz [**1.Ste**] pour une présentation plus systématique. Le lecteur trouvera néanmoins dans ce chapitre un exposé assez détaillé des questions de familles normales basé sur le principe de renormalisation de Zalcman. Nous y présentons, en particulier, des démonstrations simples et nouvelles des théorèmes de Montel et de Picard.

1. La sphère de Riemann

Considérons la compactification $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ du plan complexe obtenue par adjonction d'un point à l'infini. La projection stéréographique $z \mapsto z^*$ permet d'identifier $\widehat{\mathbb{C}}$ à la sphère unité euclidienne $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$:

Une topologie est induite sur $\widehat{\mathbb{C}}$ au moyen de la *métrique sphérique* σ définie par $\sigma(z,w) = \|z^* - w^*\|_{\mathbb{R}^3}$ et $\sigma(z,\infty) = \lim_{w\to\infty} \sigma(z,w)$. On vérifie que

$$\sigma(z,w) = \frac{2|z-w|}{(1+|z|^2)^{1/2}(1+|w|^2)^{1/2}}, \quad \sigma(z,\infty) = \frac{2}{(1+|z|^2)^{1/2}}$$

et que $\sigma(z,w) = \sigma(1/z, 1/w)$.

On munit $\widehat{\mathbb{C}}$ d'une structure de variété compacte complexe de dimension un au moyen des cartes $z \mapsto z$ sur $\mathbb{C}$ et $z \mapsto 1/z$ au voisinage de l'infini. Cette variété s'appelle la *sphère de Riemann.*

Pour une application holomorphe $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ on définit la *dérivée sphérique* $|f'(z)|_\sigma$ de f en z par

$$|f'(z)|_\sigma := \lim_{w\to z} \frac{\sigma(f(w), f(z))}{\sigma(w,z)}.$$

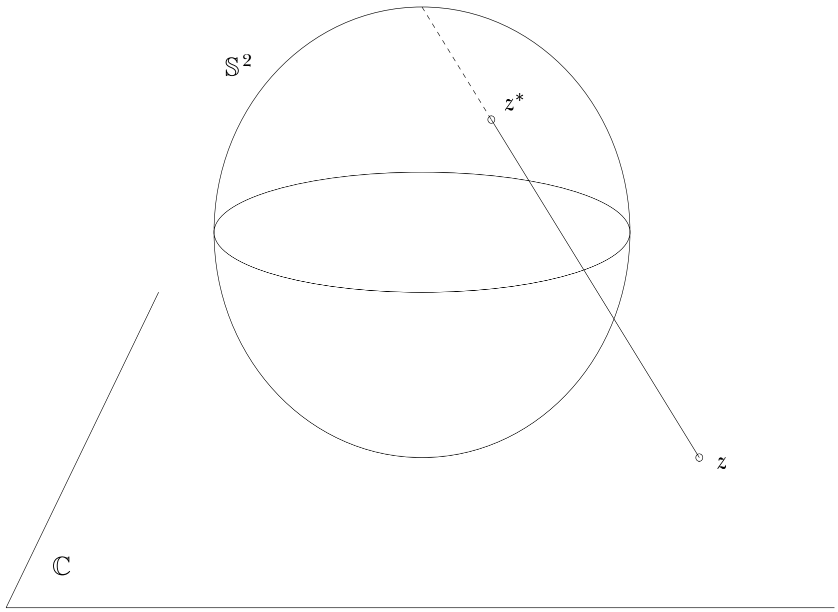

FIGURE I.1. La projection stéréographique.

Dans le cas d'une application f définie sur le disque unité à valeurs dans $\widehat{\mathbb{C}}$ on appelle également dérivée sphérique la quantité

$$f^{\#}(z) := \lim_{w \to z} \frac{\sigma(f(w), f(z))}{|w - z|}.$$

Pour une telle application, les deux expressions sont équivalentes. On vérifie sans peine que $g^{\#}(z) = rf^{\#}(z)$ si $g(z) = f(rz)$.

Par un argument d'intégration, on voit qu'une famille d'applications du disque unité dans $\widehat{\mathbb{C}}$ dont les dérivées sphériques sont uniformément bornées est équicontinue.

2. Applications holomorphes dans $\widehat{\mathbb{C}}$

Une application $f : \mathbb{D} \to \widehat{\mathbb{C}}$ du disque unité de $\mathbb{C}$ dans la sphère de Riemann sera dite *holomorphe* en z_0 si sa composée avec l'une des cartes définissant la structure de $\widehat{\mathbb{C}}$ est analytique au voisinage de z_0. De la même façon on dira qu'une application $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ de la sphère de Riemann sur elle-même est holomorphe si f (ou $1/f$) est analytique au voisinage de tout point $z_0 \in \mathbb{C}$ et $f(1/z)$ (ou $1/f(1/z)$) est analytique au voisinage de 0. Par exemple, si $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ est un polynôme alors

$$\frac{1}{f(1/z)} = \frac{z^n}{a_0 z^n + \cdots + a_n}$$