Mémoires
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 120
Nouvelle série

CONVERGENCE DES POLYGONES DE HARDER-NARASIMHAN

H. Chen

2010

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 28 € ($ 42)
Abonnement Europe : 255 €, hors Europe : 290 € ($ 435)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0249-633-X

ISBN 978-2-85629-296-9

Directrice de la publication : Aline BONAMI

MÉMOIRES DE LA SMF 120

CONVERGENCE DES POLYGONES DE HARDER-NARASIMHAN

Huayi Chen

Société Mathématique de France 2010
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

H. Chen
Université Paris Diderot — Paris 7, Institut de mathématiques de Jussieu.
E-mail : `chenhuayi@math.jussieu.fr`

***Classification mathématique par sujets* (2000).** – 14G40, 14F05.

***Mots-clefs*.** – Géométrie d'Arakelov, méthode de pentes, filtration, polygone de Harder-Narasimhan, théorème de Hilbert-Samuel.

CONVERGENCE DES POLYGONES DE HARDER-NARASIMHAN

Huayi Chen

Résumé. – On interprète la théorie des polygones de Harder-Narasimhan par le langage des $\mathbb{R}$-filtrations. En utilisant une variante du lemme de Fekete et un argument combinatoire des monômes, on établit la convergence uniforme des polygones associés à une algèbre graduée munie de filtrations. Cela conduit à l'existence de plusieurs invariants arithmétiques dont un cas très particulier est la capacité sectionnelle. Deux applications de ce résultat en géométrie d'Arakelov sont abordées : le théorème de Hilbert-Samuel arithmétique ainsi que l'existence et l'interprétation géométrique de la pente maximale asymptotique.

Abstract **(Convergence of Harder-Narasimhan polygons).** – We interpret the theory of Harder-Narasimhan polygons by the language of $\mathbb{R}$-filtrations. By using a variant version of Fekete's lemma and a combinatoric argument on monomials, we establish the uniform convergence of polygons associated to a graded algebra equipped with filtrations. This leads to the existence of several arithmetic invariants a very particular case of which is the sectional capacity. Two applications in Arakelov geometry are developed: the arithmetic Hilbert-Samuel theorem and the existence and the geometric interpretation of the asymptotic maximal slope.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Dans l'approximation diophantienne, on s'intéresse à étudier les solutions rationnelles d'un système d'équations polynomiales à coefficients dans un corps de nombres. L'approche d'Arakelov, qui est une combinaison de la théorie des schémas à la Grothendieck avec la géométrie complexe hermitienne, fournit un cadre géométrique bien adapté aux équations polynomiales en tenant compte les métriques.

Un formalisme important dans ce cadre est l'application d'évaluation et la méthode de pentes dues à Bost [**6, 9**]. Étant donnés un corps de nombres K, une variété projective X définie sur K et un faisceau inversible ample L sur X, l'espace $H^0(X,L)$ peut être considéré comme un espace de "polynômes homogènes". L'*application d'évaluation* (notée $\mathrm{EV}_{\Sigma,L}$) est un homomorphisme de $H^0(X,L)$ vers $H^0(\Sigma,L|_\Sigma)$ défini par restriction des sections à Σ, où Σ est un sous-K-schéma fermé de X. Cela généralise la construction classique qui consiste à évaluer les valeurs des polynômes homogènes en un ou plusieurs points rationnels.

Quitte à choisir un modèle entier de (X,L) et une métrique hermitienne sur $L_{\mathbb{C}}$, la source et le but de l'application $\mathrm{EV}_{\Sigma,L}$ deviennent des espaces vectoriels sur K associés à certains *fibrés vectoriels hermitiens* sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, où $\mathcal{O}_K$ est l'anneau des entiers dans K. On obtient, en utilisant les inégalités de pentes, des éléments non-nuls dans $H^0(X,L)$ dont l'image par $\mathrm{EV}_{\Sigma,L}$ est nulle. Classiquement ces éléments sont appelés des "polynômes auxiliaires" qui sont des objets essentiels dans l'approximation diophantienne, souvent construits par le lemme de Siegel.

L'intérêt de la méthode de pentes est de transformer une "démonstration de transcendence" à une seule inégalité. Cette inégalité, dont les ingrédients sont des invariants arithmétiques naturellement définis, comme la *hauteur* d'un homomorphisme K-linéaire, le *degré d'Arakelov* et la *pente* d'un fibré vectoriel hermitien, permet de séparer les contributions de différents termes, et de donner un cadre plus souple pour diverses méthodes d'estimation.

Dans de nombreuses applications, on considère une suite d'applications d'évaluation $\mathrm{EV}_{\Sigma,L^{\otimes n}}$ et étudie leur comportement asymptotique lorsque n tend vers l'infini. Il est donc nécessaire de comprendre le comportement asymptotique des fibrés vectoriels hermitiens dont les espaces vectoriels sous-jacents sont les $H^0(X,L^{\otimes n})$.

Le premier résultat dans cette direction est le théorème de Hilbert-Samuel arithmétique dû à Gillet et Soulé [**23**]. Soient $(\mathscr{X},\mathscr{L})$ un modèle entier de (X,L) et $\pi:\mathscr{X}\rightarrow\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ le morphisme structurel. Si on munit l'espace vectoriel $H^0(X,L^{\otimes n})$

des sup-normes, le $\mathscr{O}_K$-module $\pi_*(\mathscr{L}^{\otimes n})$ peut être considéré comme un réseau dans un espace vectoriel normé. Gillet et Soulé ont montré que, si les métriques sur L sont positives, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(d+1)!}{n^{d+1}}\chi(\pi_*(\mathscr{L}^{\otimes n}),\|\cdot\|_{\sup})=\widehat{c}_1(\overline{\mathscr{L}})^{d+1},$$

où $d=\dim X$, $\widehat{c}_1(\overline{\mathscr{L}})^{d+1}$ est le nombre d'intersection arithmétique et χ est la caractéristique d'Euler-Poincaré, qui est le logarithme du volume de la boule unité divisé par le covolume du réseau. Une reformulation de ce résultat est

$$\lim_{n\to+\infty}\widehat{\mu}(\overline{\pi_*(\mathscr{L}^{\otimes n})})/n=\frac{\widehat{c}_1(\overline{\mathscr{L}}^{d+1})}{[K:\mathbb{Q}](d+1)c_1(L)^d},$$

où $\widehat{\mu}$ est la fonction de pente, qui est le degré d'Arakelov normalisé divisé par le rang.

Bien que les autres pentes comme par exemple la pente maximale $\widehat{\mu}_{\max}$, qui est la valeur maximale des pentes des sous-fibrés, et la pente minimale $\widehat{\mu}_{\min}$, qui est la valeur minimale des pentes des fibrés quotients, interviennent aussi naturellement dans les inégalités de pentes, on sait relativement peu sur leur comportement asymptotique. Par exemple, dans [**7**], Bost a démontré que les pentes maximales $\widehat{\mu}_{\max}(S^n\overline{E})$ croissent linéairement lorsque n tend vers l'infini. Il a aussi obtenu des majorations de ces pentes maximales. Mais on ne sait pas en général si la limite des $\widehat{\mu}_{\max}(S^n\overline{E})/n$ existe dans $\mathbb{R}$. L'une des difficultés est que, contrairement à la fonction de pente $\widehat{\mu}$, en général la pente maximale et la pente minimale n'admettent pas d'additivité par rapport aux suites exactes courtes, qui est une condition importante dans la technique de dévissage.

Le but de cet article est alors d'étudier le comportement asymptotique des fibrés vectoriels hermitiens. En particulier, on établit la convergence des suites $(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{\pi_*(\mathscr{L}^{\otimes n})})/n)_{n\geqslant 1}$ et $(\widehat{\mu}_{\min}(\overline{\pi_*(\mathscr{L}^{\otimes n})})/n)_{n\geqslant 1}$. Pour surmonter la difficulté d'absence de l'additivité, on utilise la technique de polygone de Harder-Narasimhan avec le point de vue des $\mathbb{R}$-filtrations et des mesures. Le polygone de Harder-Narasimhan est initialement une notion en géométrie algébrique, proposée par Harder et Narasimhan [**28**]. En géométrie d'Arakelov, cette notion est introduite par Stuhler [**42**] et Grayson [**24**]. Si $\overline{E}$ est un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_K$, le polygone de Harder-Narasimhan de $\overline{E}$ est par définition la fonction concave sur $[0,\operatorname{rg}E]$ dont le graphe est le bord supérieur de l'enveloppe convexe des points $(\operatorname{rg}F,\widehat{\deg}_n(\overline{F}))$, où $\widehat{\deg}_n(\overline{F})$ est le degré d'Arakelov normalisé de F. On désigne par $\mathscr{P}_{\overline{E}}$ la forme normalisée de ce polygone, c'est-à-dire la fonction définie sur $[0,1]$ dont le graphe est similaire à celui du polygone de Harder-Narasimhan. L'avantage du polygone normalisé est qu'il permet d'étudier les diverses pentes en même temps :

$$\widehat{\mu}(\overline{E})=\mathscr{P}_{\overline{E}}(1),\qquad \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})=\lim_{t\to 0+}\mathscr{P}'_{\overline{E}}(t),\qquad \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})=\lim_{t\to 1-}\mathscr{P}'_{\overline{E}}(t).$$

Les sommets du polygone de Harder-Narasimhan correspondent à un drapeau de E :

$$E=E_0\supsetneq E_1\supsetneq\cdots\supsetneq E_d=0$$