AST

# Table des matières

*Astérisque*, tome 142-143 (1986), p. 1

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1986__142-143__1_0>

*TABLE DES MATIÈRES*

Astérisque

MICHEL ENGUEHARD

# Obstructions et $p$-groupes de classe 3

*Astérisque*, tome 142-143 (1986), p. 3-48
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1986__142-143__3_0>

*Société Mathématique de France*
*Astérisque 142-143 (1986)*

# OBSTRUCTIONS ET p-GROUPES DE CLASSE 3



Dans une première partie (chapitre I) est exposée ce que l'on peut considérer comme une généralisation de la théorie des obstructions: si G est un groupe, N un sous-groupe normal de G et A un G-module, donner une condition explicite pour qu'un 2-cocycle de N dans A soit restriction d'un 2-cocycle de G dans A. La suite de Serre-Hochschild et la méthode de décalage apportent une certaine réponse. Interviennent les groupes de cohomologie $H^2(G/N,H^1(N,A))$ et $H^3(G/N,A^N)$. La procédure qui suit m'a été signalée par Lluis Puig. Soit B un G-module convenablement choisi (par exemple quotient par A du G-module induit sur A, cf I.(b),1.), et posons $Q = G/N$; on définit deux suites exactes qui se croisent en deux points

$$[\mathfrak{c}_1] \qquad 0 \longrightarrow H^1(Q,B^N) \xrightarrow{\upsilon_1} H^2(G,A) \xrightarrow{res} H^2(N,A)^G \xrightarrow{\upsilon_2} H^2(Q,B^N)$$

$$[\mathfrak{c}_2] \qquad H^1(Q,B^N) \xrightarrow{\upsilon_3} H^1(Q,H^1(N,A)) \xrightarrow{\upsilon_4} H^3(Q,A^N) \xrightarrow{\upsilon_5} H^2(Q,B^N) \xrightarrow{\upsilon_6} H^2(Q,H^1(N,A))$$

Ainsi un élément $\Theta$ de $H^2(N,A)^G$ est dans l'image de $H^2(G,A)$ si et seulement si $\upsilon_2(\Theta)$ est nul. Cette condition se décompose en deux

1) $(\upsilon_6 \circ \upsilon_2)(\Theta)$ est nul,

2) si tel est le cas, par $(\upsilon_5)^{-1}$ on obtient dans $H^3(Q,A^N)$ une classe modulo le sous-groupe $\upsilon_4(H^1(Q,H^1(N,A))$ et la seconde condition nécessaire est que cette classe contienne 0.

Au chapitre I, (b) on décrit comment on peut calculer explicitement, en fonction d'un 2-cocycle de N dans A et d'une section de Q dans G, les éléments de $H^3(Q,A^N)$ et $H^2(Q,H^1(N,A))$ ainsi rencontrés. La procédure conduit à utiliser un système de facteurs gauche, et il semble qu'avec un système de facteurs droit les formules soient nécessairement plus compliquées ([1]), sauf lorsque N opère trivialement sur A. Cette dernière hypothèse nous rapproche de la théorie classique des obstructions de Eilenberg et MacLane [2].

Pour préciser ce point, adoptons les notations suivantes:

pour tout groupe X, Aut(X) est le groupe des automorphismes de X, $\mathrm{Int}_X$ est le morphisme canonique "automorphismes intérieurs" ($\mathrm{Int}_X : X \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$) et on pose $\mathrm{Out}(X) = \mathrm{Aut}(X)/\mathrm{Int}_X(X)$.

Considérons une extension $\hat{N}$ de N par A et supposons en outre que A soit le centre de $\hat{N}$. Une extension $\hat{G}$ de G par A qui se restreint en $\hat{N}$ définit des extensions de Q par $\hat{N}$ admettant G pour quotient ([2]). Le groupe N est isomorphe à $\mathrm{Int}_{\hat{N}}(\hat{N})$; le groupe $\hat{G}$ opère sur $\hat{N}$ par automorphismes intérieurs, ce qui définit un morphisme de $\hat{G}$ dans $\mathrm{Aut}(\hat{N})$ et un morphisme $\chi$ de Q dans $\mathrm{Out}(\hat{N})$. Selon la théorie des obstructions, la donnée de $\chi$ définit une structure de Q-module sur A et l'existence d'une extension de Q par $\hat{N}$ induisant précisément $\chi$ équivaut à la nullité d'un certain élément $\mathfrak{m}$ de $H^3(Q,A)$. En fait $\mathfrak{m}$ est déterminé par le sous-groupe $\chi(Q)$ de $\mathrm{Out}(\hat{N})$ et par $\chi$: il existe un élément privilégié $\mathfrak{m}_o$ de $H^3(\mathrm{Out}(\hat{N}),A)$ dont l'obstruction $\mathfrak{m}$ est la restriction à Q via $\chi$.

([1]) A une section $\sigma: Q \longrightarrow G$ telle que $\sigma(1) = 1$, nous associons
un système de facteurs "gauche" $\varepsilon(s,t) = \sigma(st)^{-1}\sigma(s)\sigma(t)$ ,
un système de facteurs "droit" $\delta(s,t) = \sigma(s)\sigma(t)\sigma(st)^{-1}$

([2]) Etant donnée une extension $\hat{G}$ de G par A "qui se restreint en $\hat{N}$", l'injection de $\hat{N}$ dans $\hat{G}$ n'est pas nécessairement unique, elle est définie modulo le groupe des automorphismes de $\hat{N}$ qui induisent l'identité sur N et sur A, soit Hom(N,A). A partir d'une classe d'équivalence d'extensions de G par A, on obtient un ensemble de classes d'équivalence d'extensions de Q par $\hat{N}$ sur lequel le groupe Hom(N,A) opère régulièrement.