

Astérisque

AST

Table des matières

Astérisque, tome 142-143 (1986), p. 1

http://www.numdam.org/item?id=AST_1986__142-143__1_0

© Société mathématique de France, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TABLE DES MATIÈRES

M.ENGUEHARD		
Obstructions et p-groupes de classe 3	3	
M.ENGUEHARD		
Caractérisation des groupes de Ree	49	
T.PETERFALVI		
Le théorème de Bender-Suzuki, I	141	
T.PETERFALVI		
Le théorème de Bender-Suzuki, II	235	
ABSTRACT	296	

Astérisque

MICHEL ENGUEHARD

Obstructions et p -groupes de classe 3

Astérisque, tome 142-143 (1986), p. 3-48

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1986__142-143__3_0>

© Société mathématique de France, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

OBSTRUCTIONS ET p-GROUPES DE CLASSE 3

I. OBSTRUCTIONS	8
II. EXTENSIONS DE GROUPEs ABÉLIENS ÉLÉMENTAIRES ET p-GROUPES DE CLASSE 2.	24
III. COBORDS MULTIADDITIFS	32
IV. SUR CERTAINS p-GROUPES DE CLASSE 3	35

Dans une première partie (chapitre I) est exposée ce que l'on peut considérer comme une généralisation de la théorie des obstructions: si G est un groupe, N un sous-groupe normal de G et A un G -module, donner une condition explicite pour qu'un 2-cocycle de N dans A soit restriction d'un 2-cocycle de G dans A . La suite de Serre-Hochschild et la méthode de décalage apportent une certaine réponse. Interviennent les groupes de cohomologie $H^2(G/N, H^1(N, A))$ et $H^3(G/N, A^N)$. La procédure qui suit m'a été signalée par Lluís Puig. Soit B un G -module convenablement choisi (par exemple quotient par A du G -module induit sur A , cf I. (b), l.), et posons $Q = G/N$; on définit deux suites exactes qui se croisent en deux points

$$\begin{array}{l}
 [c_1] \quad 0 \longrightarrow H^1(Q, B^N) \xrightarrow{u_1} H^2(G, A) \xrightarrow{\text{res}} H^2(N, A)^G \xrightarrow{u_2} H^2(Q, B^N) \\
 [c_2] \quad H^1(Q, B^N) \xrightarrow{u_3} H^1(Q, H^1(N, A)) \xrightarrow{u_4} H^3(Q, A^N) \xrightarrow{u_5} H^2(Q, B^N) \xrightarrow{u_6} H^2(Q, H^1(N, A))
 \end{array}$$

Ainsi un élément θ de $H^2(N, A)^G$ est dans l'image de $H^2(G, A)$ si et seulement si $u_2(\theta)$ est nul. Cette condition se décompose en deux

- 1) $(u_6 \circ u_2)(\theta)$ est nul,
- 2) si tel est le cas, par $(u_5)^{-1}$ on obtient dans $H^3(Q, A^N)$ une classe modulo le sous-groupe $u_4(H^1(Q, H^1(N, A)))$ et la seconde condition nécessaire est que cette classe contienne 0.

Au chapitre I, (b) on décrit comment on peut calculer explicitement, en fonction d'un 2-cocycle de N dans A et d'une section de Q dans G , les éléments de $H^3(Q, A^N)$ et $H^2(Q, H^1(N, A))$ ainsi rencontrés. La procédure conduit à utiliser un système de facteurs gauche, et il semble qu'avec un système de facteurs droit les formules soient nécessairement plus compliquées ⁽¹⁾, sauf lorsque N opère trivialement sur A . Cette dernière hypothèse nous rapproche de la théorie classique des obstructions de Eilenberg et MacLane [2].

Pour préciser ce point, adoptons les notations suivantes:

pour tout groupe X , $\text{Aut}(X)$ est le groupe des automorphismes de X , Int_X est le morphisme canonique "automorphismes intérieurs" ($\text{Int}_X : X \rightarrow \text{Aut}(X)$) et on pose $\text{Out}(X) = \text{Aut}(X)/\text{Int}_X(X)$.

Considérons une extension \hat{N} de N par A et supposons en outre que A soit le centre de \hat{N} . Une extension \hat{G} de G par A qui se restreint en \hat{N} définit des extensions de Q par \hat{N} admettant G pour quotient ⁽²⁾. Le groupe N est isomorphe à $\text{Int}_{\hat{N}}(\hat{N})$; le groupe \hat{G} opère sur \hat{N} par automorphismes intérieurs, ce qui définit un morphisme de \hat{G} dans $\text{Aut}(\hat{N})$ et un morphisme χ de Q dans $\text{Out}(\hat{N})$. Selon la théorie des obstructions, la donnée de χ définit une structure de Q -module sur A et l'existence d'une extension de Q par \hat{N} induisant précisément χ équivaut à la nullité d'un certain élément m de $H^3(Q, A)$. En fait m est déterminé par le sous-groupe $\chi(Q)$ de $\text{Out}(\hat{N})$ et par χ : il existe un élément privilégié m_0 de $H^3(\text{Out}(\hat{N}), A)$ dont l'obstruction m est la restriction à Q via χ .

⁽¹⁾ A une section $\sigma: Q \rightarrow G$ telle que $\sigma(1) = 1$, nous associons
un système de facteurs "gauche" $\varepsilon(s, t) = \sigma(st)^{-1}\sigma(s)\sigma(t)$,
un système de facteurs "droit" $\delta(s, t) = \sigma(s)\sigma(t)\sigma(st)^{-1}$

⁽²⁾ Etant donnée une extension \hat{G} de G par A "qui se restreint en \hat{N} ", l'injection de \hat{N} dans \hat{G} n'est pas nécessairement unique, elle est définie modulo le groupe des automorphismes de \hat{N} qui induisent l'identité sur N et sur A , soit $\text{Hom}(N, A)$. A partir d'une classe d'équivalence d'extensions de G par A , on obtient un ensemble de classes d'équivalence d'extensions de Q par \hat{N} sur lequel le groupe $\text{Hom}(N, A)$ opère régulièrement.