AST

Formule de Chernoff et problèmes statistiques associés : table des matières

Astérisque, tome 68 (1979), p. 1

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__68__1_0>

FORMULE DE CHERNOFF ET PROBLÈMES STATISTIQUES ASSOCIÉS.

Astérisque

DIDIER DACUNHA-CASTELLE

Introduction

Astérisque, tome 68 (1979), p. 3-18

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__68__3_0>

INTRODUCTION

D. DACUNHA-CASTELLE.

I. LES FONDEMENTS PROBABILISTES DE LA THÉORIE DES GRANDES DÉVIATIONS.

La théorie des grandes déviations (grands écarts) concerne la loi faible des grands nombres. Si $X_1 \ldots X_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, équidistribuées, d'espérance $EX = 0$, et si $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, la loi faible des grands nombres assure de la convergence vers 0 de $\frac{S_n}{n}$ (en probabilité). Pour préciser cette convergence, on dispose d'abord du théorème de limite centrale qui étudie la convergence de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$. Soit $a > 0$, on obtient :

$$P\,(S_n > \sqrt{n}\,\sigma\, a) \sim 1 - \Phi\,(a)$$

où Φ est la répartition de la loi normale et $\sigma^2 = EX^2$. Au lieu d'étudier le grossissement $\sqrt{n}$ de $\frac{S_n}{n}$, on peut étudier les grandes déviations sans grossissement, à savoir $P\,(S_n > na)$. Ces grandes déviations sont rares et le premier résultat sera que

$$P\,(S_n > na) \sim e^{-nh(a)} \qquad (1)\,,$$

où h est une fonction convenable.

De manière générale, on peut étudier $P\,(S_n > B_n\, a)$.

$B_n = O\,(\sqrt{n})$ donne le théorème de limite centrale et $B_n = O\,(n)$ les grandes déviations. Entre les deux $\sqrt{n} = o\,(B_n)$ et $B_n = o\,(n)$, on trouve la théorie des moyennes déviations, qui conduit à des probabilités de l'ordre de $\frac{1}{n^{\alpha}}$ pour des α convenables, $\alpha > 0$, dans certains cas.

Bien entendu, l'ensemble de ces théorèmes ne valent que sur des hypothèses convenables sur la queue des distributions des X. Très grossièrement la loi des grands nombres demande $E\,|X| < \infty$, le théorème limite centrale $E\,X^2 < \infty$ et les résultats de grandes déviations $E \exp tX < \infty$ pour des $t > 0$. Si les premiers résultats sur les grandes déviations sont dus à KHINCHINE [6], puis avant-guerre par exemple à CRAMER [3] ils ont pris sous l'influence des statisticiens le nom générique de formules de Chernoff [2]. En fait, on trouve d'abord des majorations exponentielles du type $P(S_n > na) \leqq e^{-nh(a)}$ qui dans les cas simples sont des applications directes d'une formule de Markov-Tchebychev. La minoration, même dans le cas élémentaire que nous venons d'introduire, a une démonstration intéressante en soi. Elle est une conséquence directe de la loi faible des grands nombres, appliquée à $\frac{S_n}{n}$, non pour la probabilité initiale associée à la loi dF des X, mais pour une nouvelle probabilité P_a obtenue en remplaçant dF par dF_a, avec $\frac{dF_a}{dF}(x) = \frac{e^{tx}}{\phi(t)}$, où t est choisi tel que $\int x\, dF_a(x) = a$, soit $\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = a$ si $\phi(t) = E \exp tX$.

Ce recentrage de la probabilité permet d'appliquer un théorème ergodique, ici la loi faible ordinaire. Cette idée sera essentielle.

Le chapitre I, élémentaire, souligne que pour qu'une suite Z_n de loi P_n satisfasse à la formule (1), il suffit que la transformée de Laplace Φ_n de P_n existe sur un intervalle contenant 0 et qu'elle ait un comportement ergodique du type $\frac{1}{n} \log \Phi_n(t) \to L(t)$. Cette convergence assure la loi faible des grands nombres pour les $dP_{n,a}$ obtenues par recentrage. On a aussi le théorème limite centrale pour les $P_{n,a}$ qui donne d'ailleurs un développement plus précis que (1).

La technique utilisée pour obtenir (1) est voisine de celle utilisée par exemple par LINNIK et FELLER [5] pour obtenir des formules de moyennes déviations mais aussi des techniques utilisées pour obtenir des développements affinant le théorème de limite centrale, comme les techniques de point de selle.

Intuitivement, si l'on interprète les X_i comme des variables à valeur