Astérisque

C. Chambon
F. Combes
N. Dang Ngoc
M. Enock
A. Guichardet
F. Ledrappier
J. C. Marcuard
O. Maréchal
M. Samuélidès
J. L. Sauvageot
J. M. Schwartz
J. P. Thouvenot

Systèmes dynamiques non commutatifs

Astérisque, tome 13-14 (1974)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__13-14__1_0>

SYSTEMES DYNAMIQUES NON COMMUTATIFS

Séminaire rédigé par A.Guichardet d'après des exposés faits au Séminaire Dang Ngoc - Guichardet 1972 - 1973 par C.Chambon, F.Combes, N.Dang Ngoc, M.Enock, A.Guichardet, F.Ledrappier, J.C.Marcuard, O. Maréchal, M.Samuélidès, J.L.Sauvageot, J.M.Schwartz, J.P.Thouvenot.

Table des matières

Première Partie : W^* - SYSTÈMES DYNAMIQUES

Chapitre I GÉNÉRALITÉS

§ I.1. Définitions et notations.

(Voir aussi Appendice A, § A.7)

Etant donnée une W^* - algèbre $\underline{A}$, on appellera automorphismes de $\underline{A}$ les $*$ - automorphismes de $\underline{A}$ et on notera Aut $\underline{A}$ le groupe qu'ils forment ; un tel automorphisme est automatiquement isométrique et bicontinu pour la topologie ultra-faible. On note Int $\underline{A}$ le sous-groupe distingué de Aut $\underline{A}$ formé des automorphismes intérieurs, c'est-à-dire de la forme

$$a \longmapsto i_u(a) = u\, a\, u^{-1}$$

où u appartient à $\underline{U}(\underline{A})$, l'ensemble des éléments unitaires de $\underline{A}$. On munit toujours, sauf mention expresse du contraire, Aut $\underline{A}$ de la topologie de la convergence simple ultra-faible. On dit qu'un groupe G opère dans $\underline{A}$ par automorphismes si l'on s'est donné un morphisme de G dans Aut $\underline{A}$.

Lemme I.1. L'application canonique p de $\underline{U}(\underline{A})$ sur Int $\underline{A}$ est continue si l'on munit $\underline{U}(\underline{A})$ de la topologie ultra-faible ; si $\underline{A}$ peut être réalisée dans un espace hilbertien séparable (ce qui équivaut à dire que son prédual est séparable pour la topologie de la norme), $\underline{U}(\underline{A})$ et Int $\underline{A}$ sont des espaces polonais et p admet une section borélienne.

La première assertion est facile ; la seconde résulte de Dixmier [3], lemmes 3 et 4.

Notations diverses.

Etant donnée une W^* - algèbre $\underline{A}$ on notera $\underline{C}$ son centre, $\underline{E}$ ou $\underline{E}(\underline{A})$ l'ensemble des états normaux sur $\underline{A}$, $\underline{P}$ ou $\underline{P}(\underline{A})$ celui des poids normaux semi-finis (poids n.s.f.), $\underline{P}_f$ celui des poids normaux semi-finis fidèles (poids n.s.f.f.).

Un système dynamique (ou W^* - système dynamique, ou SD) est un couple $\underline{F} = (\underline{A}, G)$ où G est un groupe opérant dans $\underline{A}$ par automorphismes ; on notera g.a ou g a l'action de $g \in G$ sur $a \in \underline{A}$; alors G opère aussi dans $\underline{E}$ et $\underline{P}$ par $(g.\varphi)(a) = \varphi(g^{-1}a)$; même chose pour $\underline{A}_*$. On notera $\underline{I}$ ou $\underline{A}^G$ l'ensemble des éléments G-invariants de $\underline{A}$, $\underline{A}_*^G$ l'ensemble analogue pour $\underline{A}_*$; même chose pour $\underline{C}^G$, $\underline{E}^G$, $\underline{P}^G$.

Pour tout $a \in \underline{A}$ on note G.a l'orbite de a sous l'action de G, co G.a son enveloppe convexe, $\overline{\text{co G.a}}$ son enveloppe convexe ultra-faiblement fermée.

On dit que G opére ergodiquement ou que le système $\underline{F}$ est ergodique si $\underline{I}$ est réduit aux scalaires ; on dit que $\underline{F}$ est centralement ergodique si G opère ergodiquement dans $\underline{C}$.

Pour tout projecteur $e \in \underline{I}$, G opère naturellement dans la sous-algèbre $e\,\underline{A}\,e$; on obtient ainsi un système dynamiquenoté $(e\,\underline{A}\,e, G)$ ou $\underline{F}_e$ et appelé induit.

Remarque I.1. Il serait intéressant de définir un système induit $\underline{F}_e$ même lorsque e n'est pas invariant, comme cela se fait lorsque $\underline{A}$ est commutative (cf. § B.7) ou que $G = \text{Int}\,\underline{A}$.

On vérifie aisément les propriétés suivantes :

- si φ est un poids n.s.f. invariant, son support appartient à $\underline{I}$; si φ est fidèle, les automorphismes σ_t^φ permutent à G et l'algèbre $\underline{A}_\varphi$ des éléments σ_t^φ invariants est G-invariante ;