

# *Astérisque*

C. CHAMBON

F. COMBES

N. DANG NGOC

M. ENOCK

A. GUICHARDET

F. LEDRAPPIER

J. C. MARCUARD

O. MARÉCHAL

M. SAMUÉLIDÈS

J. L. SAUVAGEOT

J. M. SCHWARTZ

J. P. THOUVENOT

## **Systèmes dynamiques non commutatifs**

*Astérisque*, tome 13-14 (1974)

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1974\\_\\_13-14\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__13-14__1_0)

© Société mathématique de France, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SYSTEMES DYNAMIQUES NON COMMUTATIFS

Séminaire rédigé par A.Guichardet d'après des exposés faits au  
Séminaire Dang Ngoc - Guichardet 1972 - 1973 par C.Chambon, F.Combes,  
N.Dang Ngoc, M.Enock, A.Guichardet, F.Ledrappier, J.C.Marcuard, O.  
Maréchal, M.Samuélidès, J.L.Sauvageot, J.M.Schwartz, J.P.Thouvenot.



Table des matières

	<u>pages</u>
PREMIERE PARTIE. $W^*$ - SYSTEMES DYNAMIQUES.	
Chapitre I. Généralités.	
§ I.1. Définitions et notations.	6
§ I.2. Systèmes dynamiques concrets, représentations, morphismes, produits croisés.	9
§ I.3. Systèmes dynamiques avec groupes topologiques.	14
§ I.4. Systèmes dynamiques finis, semi-finis, etc.	16
§ I.5. Systèmes dynamiques discrets ou continus.	19
Chapitre II. L'espérance conditionnelle $E^G$ .	
§ II.1. Théorème d'existence.	20
§ II.2. Cas des systèmes dynamiques finis.	24
§ II.3. Poids $G$ - invariants.	29
§ II.4. Application aux espérances conditionnelles sur certaines sous - $W^*$ - algèbres.	32
§ II.5. Type des produits croisés.	35
§ II.6. Extensions des systèmes dynamiques.	36
§ II.7. Systèmes dynamiques quotients.	37
Chapitre III. Etude des systèmes dynamiques $(\underline{A}, G)$ où $\underline{A}$ est semi-finie.	
§ III.1. Le théorème fondamental.	38
§ III.2. Quelques conséquences.	48
§ III.3. Cas où $G$ opère trivialement sur $\underline{C}$ .	50
Chapitre IV. Equivalence des projecteurs selon E.Størmer.	
§ IV.1. Le théorème fondamental.	53
§ IV.2. Autres résultats.	56

Chapitre V. Etude de diverses propriétés moins fortes que la commutativité de $\underline{A}$ .	
§ V.1. Quelques propriétés des systèmes dynamiques concrets.	57
§ V.2. Diverses propriétés moins fortes que la commutativité de $\underline{A}$ .	59
§ V.3. Exemples.	68
Chapitre VI. Systèmes dynamiques concrets, ergodicité, spectre de U.	
§ VI.1. Diverses propriétés analogues à l'ergodicité.	75
§ VI.2. Propriétés des états normaux invariants des systèmes dynamiques abstraits.	81
§ VI.3. Propriétés du spectre de U .	84
Chapitre VII. Construction de Krieger.	
§ VII.1. Généralités.	91
§ VII.2. Rappels sur le produit croisé.	91
§ VII.3. Construction de Krieger : définition du couple $(\underline{A}, \underline{A}_0)$ .	93
§ VII.4. Propriétés du couple $(\underline{A}, \underline{A}_0)$ .	96
§ VII.5. Isomorphisme des couples associés à deux systèmes dynamiques.	101
§ VII.6. Couple associé à un système dynamique induit.	103
DEUXIEME PARTIE. C* - SYSTEMES DYNAMIQUES.	
Chapitre VIII. Généralités, représentations, produits croisés.	108
§ VIII.1. Généralités.	108
§ VIII.2. Représentations induites.	109
§ VIII.3. Systèmes d'imprimitivité.	110
§ VIII.4. Produits croisés.	112
Chapitre IX. Etats invariants.	114
§ IX.1. Généralités.	114
§ IX.2. Propriétés moins fortes que la commutativité de A.	115

§ IX.3. Etats invariants extrémaux, mélangeants, etc.	116
§ IX.4. Désintégration des états invariants.	117
§ IX.5. Mesures centrales des états invariants.	120
Chapitre X. Représentations et états covariants et quasi-invariants.	121
§ X.1. Généralités.	121
§ X.2. Etude des représentations et états quasi-invariants.	122
§ X.3. Etude des représentations et états covariants.	124
Chapitre XI. Exemples.	127
§ XI.1. Automorphismes intérieurs.	127
§ XI.2. Produits tensoriels infinis et permutations.	127
§ XI.3. Algèbre des relations d'anticommutation.	135
§ XI.4. Algèbre d'observables quasi-locales de la Mécanique Statistique	140
<b>APPENDICES.</b>	
Appendice A. $W^*$ - algèbres.	141
§ A.1. Généralités.	141
§ A.2. Poids.	143
§ A.3. Classification des $W^*$ - algèbres. Comparaison des projecteurs.	145
§ A.4. Automorphismes modulaires associés à un poids.	147
§ A.5. Densités.	149
§ A.6. Espérances conditionnelles.	150
§ A.7. Quelques propriétés des automorphismes des $W^*$ - algèbres.	151
§ A.8. Produits tensoriels infinis.	153
Appendice B. Systèmes dynamiques commutatifs.	155
§ B.1. Généralités.	155
§ B.2. Représentations associées à un système dynamique.	156

§ B.3. Systèmes ergodiques.	159
§ B.4. Classification des systèmes dynamiques.	162
§ B.5. Groupes pleins d'automorphismes.	163
§ B.6. Systèmes dynamiques induits.	164
§ B.7. Comparaison des sous-ensembles.	166
§ B.8. Propriétés particulières aux systèmes dynamiques avec mesures invariante.	168
Appendice C. Théorèmes ergodiques abstraits. Fonctions faiblement presque périodiques.	171
§ C.1. Le théorème ergodique de Ryll-Nardzewski.	171
§ C.2. Fonctions faiblement presque périodiques sur les groupes localement compacts.	172
§ C.3. Application aux représentations.	174
§ C.4. Familles moyennantes sur les groupes localement compacts.	178
Appendice D. Cohomologie des groupes.	180
Appendice E. Désintégrations.	182
§ E.1. Mesure associée à une sous-algèbre commutative du commutant.	182
§ E.2. Propriétés de l'application $B \longmapsto \mathcal{M}_B$ .	183
§ E.3. Relations avec la théorie de la réduction.	185
§ E.4. Mesures Y - centrales.	186
§ E.5. Comparaison des mesures Y - centrales de deux états.	187
BIBLIOGRAPHIE	190
Index terminologique	196
Index des notations	198
English Summary	199

**Première Partie :  $W^*$  - SYSTÈMES DYNAMIQUES**

Chapitre I | GÉNÉRALITÉS

§ I.1. Définitions et notations.

(Voir aussi Appendice A, § A.7)

Etant donnée une  $W^*$ -algèbre  $\underline{A}$ , on appellera automorphismes de  $\underline{A}$  les  $*$ -automorphismes de  $\underline{A}$  et on notera  $\text{Aut } \underline{A}$  le groupe qu'ils forment ; un tel automorphisme est automatiquement isométrique et bicontinu pour la topologie ultra-faible. On note  $\text{Int } \underline{A}$  le sous-groupe distingué de  $\text{Aut } \underline{A}$  formé des automorphismes intérieurs, c'est-à-dire de la forme

$$a \longmapsto i_u(a) = u a u^{-1}$$

où  $u$  appartient à  $\underline{U}(\underline{A})$ , l'ensemble des éléments unitaires de  $\underline{A}$ . On munit toujours, sauf mention expresse du contraire,  $\text{Aut } \underline{A}$  de la topologie de la convergence simple ultra-faible. On dit qu'un groupe  $G$  opère dans  $\underline{A}$  par automorphismes si l'on s'est donné un morphisme de  $G$  dans  $\text{Aut } \underline{A}$ .

Lemme I.1. L'application canonique  $p$  de  $\underline{U}(\underline{A})$  sur  $\text{Int } \underline{A}$  est continue si l'on munit  $\underline{U}(\underline{A})$  de la topologie ultra-faible ; si  $\underline{A}$  peut être réalisée dans un espace hilbertien séparable (ce qui équivaut à dire que son préduel est séparable pour la topologie de la norme),  $\underline{U}(\underline{A})$  et  $\text{Int } \underline{A}$  sont des espaces polonais et  $p$  admet une section borélienne.

La première assertion est facile ; la seconde résulte de Dixmier [3], lemmes 3 et 4.

Notations diverses.

Etant donnée une  $W^*$ -algèbre  $\underline{A}$  on notera  $\underline{C}$  son centre,  $\underline{E}$  ou  $\underline{E}(\underline{A})$  l'ensemble des états normaux sur  $\underline{A}$ ,  $\underline{P}$  ou  $\underline{P}(\underline{A})$  celui des poids normaux semi-finis (poids n.s.f.),  $\underline{P}_f$  celui des poids normaux semi-finis fidèles (poids n.s.f.f.).

Un système dynamique (ou  $W^*$ -système dynamique, ou SD) est un couple  $\underline{F} = (\underline{A}, G)$  où  $G$  est un groupe opérant dans  $\underline{A}$  par automorphismes ; on notera  $g.a$  ou  $g a$  l'action de  $g \in G$  sur  $a \in \underline{A}$  ; alors  $G$  opère aussi dans  $\underline{E}$  et  $\underline{P}$  par  $(g.\varphi)(a) = \varphi(g^{-1}a)$  ; même chose pour  $\underline{A}_*$ . On notera  $\underline{I}$  ou  $\underline{A}^G$  l'ensemble des éléments  $G$ -invariants de  $\underline{A}$ ,  $\underline{A}_*^G$  l'ensemble analogue pour  $\underline{A}_*$  ; même chose pour  $\underline{C}^G$ ,  $\underline{E}^G$ ,  $\underline{P}^G$ .

Pour tout  $a \in \underline{A}$  on note  $G.a$  l'orbite de  $a$  sous l'action de  $G$ ,  $\overline{G.a}$  son enveloppe convexe,  $\overline{\overline{G.a}}$  son enveloppe convexe ultra-faiblement fermée. On dit que  $G$  opère ergodiquement ou que le système  $\underline{F}$  est ergodique si  $\underline{I}$  est réduit aux scalaires ; on dit que  $\underline{F}$  est centralement ergodique si  $G$  opère ergodiquement dans  $\underline{C}$ .

Pour tout projecteur  $e \in \underline{I}$ ,  $G$  opère naturellement dans la sous-algèbre  $e \underline{A} e$  ; on obtient ainsi un système dynamique noté  $(e \underline{A} e, G)$  ou  $\underline{F}_e$  et appelé induit.

Remarque I.1. Il serait intéressant de définir un système induit  $\underline{F}_e$  même lorsque  $e$  n'est pas invariant, comme cela se fait lorsque  $\underline{A}$  est commutative (cf. § B.7) ou que  $G = \text{Int } \underline{A}$ .

On vérifie aisément les propriétés suivantes :

- si  $\varphi$  est un poids n.s.f. invariant, son support appartient à  $\underline{I}$  ; si  $\varphi$  est fidèle, les automorphismes  $\sigma_t^\varphi$  permutent à  $G$  et l'algèbre  $\underline{A}_\varphi$  des éléments  $\sigma_t^\varphi$  invariants est  $G$ -invariante ;