

# *Astérisque*

PIERRE DE LA HARPE

ALAIN VALETTE

**La propriété ( $T$ ) de Kazhdan pour les groupes localement compacts (avec un appendice de Marc Burger)**

*Astérisque*, tome 175 (1989)

<[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1989\\_\\_175\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1989__175__1_0)>

© Société mathématique de France, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**175**

**ASTÉRIQUE**

**1989**

**LA PROPRIÉTÉ (T) DE KAZHDAN  
POUR LES GROUPES  
LOCALEMENT COMPACTS**

**Pierre de la HARPE et Alain VALETTE**

**(avec un appendice de Marc BURGER)**

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**A.M.S. subjects Classification : 22 D 10**

## INTRODUCTION

En 1967, D. Kazhdan a ouvert avec sa propriété ( $T$ ) un nouveau chapitre dans l'étude des groupes localement compacts et de leurs représentations [Kaz].

En avril-mai 1987, le Troisième Cycle Romand de Mathématiques a organisé à Berne un "Séminaire Suisse" sur le sujet du titre. En voici des notes, à quelques compressions et développements près. Nous avons adopté le plan suivant.

Définition de Kazhdan et premières conséquences (chapitre 1).

Exemples (chapitres 2, 3 et 9).

Définitions équivalentes de la propriété ( $T$ ) (chapitres 4 et 5).

Applications (chapitres 6, 7 et 8).

Liens avec les algèbres d'opérateurs (chapitre 10).

Les participants au séminaire nous ont beaucoup aidé par leurs questions et commentaires. Merci en particulier à N. A'Campo, J-P. Anker, E. Ghys, T. Giordano, E. Granirer, P. Jolissaint. Une mention spéciale pour M. Burger pour ses multiples remarques, pour nous avoir montré l'argument de Furstenberg prouvant que  $SL_3(\mathbb{R})$  est un groupe de Kazhdan (théorème 2.4), et pour l'appendice qu'il a bien voulu adjoindre à notre texte.

Nous tenons à exprimer fortement notre gratitude à J-P. Serre. D'abord pour ses exposés sur le sujet qui nous ont beaucoup appris. Ensuite pour une lecture généreuse d'une première rédaction de ce texte, et pour de nombreuses suggestions de corrections et autres améliorations. Enfin et surtout pour des résultats, inédits jusqu'ici, résolvant des problèmes posés dans la première rédaction: ces résultats apparaissent aux numéros 2.11 et suivants, 3.17 et 6.24; les premiers montrent en particulier qu'il existe des groupes de Kazhdan à centres infinis.

Les deux auteurs remercient chaleureusement Mesdames N. Aelst et M. Muller, respectivement du Secrétariat du Département de Mathématique de l'Université Libre de Bruxelles et de Genève, pour le soin et la patience qu'elles ont consacrés à la frappe des versions successives de notre manuscrit.

Le second auteur bénéficiait durant l'élaboration de ce travail d'un mandat de chargé de recherches au Fonds national belge de la Recherche scientifique.

## TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1. Définitions et premières conséquences .....	5
Chapitre 2. Principaux exemples: groupes de Lie .....	17
2.a.- Le cas de $SL_n(\mathbb{R})$ .....	17
2.b.- Autres groupes de Lie simples à centres finis .....	21
2.c.- Propriété (T) et revêtements .....	26
Chapitre 3. Principaux exemples: groupes discrets .....	31
3.a.- Sous-groupes de Kazhdan d'un groupe de Kazhdan ...	31
3.b.- Centre d'une partie bornée dans un espace métrique où l'inégalité de la médiane est vraie .....	37
3.c.- A propos d'un théorème de Wang .....	39
3.d.- Exemples de Serre et de Gromov .....	41
Chapitre 4. Définition cohomologique de la propriété (T) .....	44
4.a.- Propriété (FH) et propriété (T) .....	44
4.b.- La famille $(\mathcal{H}_t)_{t>0}$ associée à un espace de Hilbert affine .....	49
Chapitre 5. Propriété (T), fonctions de type positif et fonctions conditionnellement de type négatif .....	55
5.a.- Noyaux de type positif .....	55
5.b.- Noyaux conditionnellement de type négatif .....	62
Chapitre 6. Applications géométriques .....	69
6.a.- Arbres .....	69
6.b.- Arbres réels .....	73
6.c.- Complexes de Coxeter .....	75
6.d.- Espaces hyperboliques .....	76
Chapitre 7. Le problème de Ruziewicz .....	83
Chapitre 8. Un problème de centraux téléphoniques .....	92
Chapitre 9. $Sp(1, n)$ est un groupe de Kazhdan ( $n \geq 2$ ) .....	102
9.a.- Preuve du théorème A .....	105
9.b.- Preuve du théorème B .....	116
Chapitre 10. Algèbres d'opérateurs .....	128
Questions .....	133
Appendice, par M. Burger. Constantes de Kazhdan pour $SL_3(\mathbb{Z})$	135
Bibliographie .....	141
Index terminologique .....	151
Index de quelques groupes .....	155