Astérisque

C. Soulé

Théorie de Nevanlinna et théorie d'Arakelov

Astérisque, tome 183 (1990), p. 127-135

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1990__183__127_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 183 (1990)

THÉORIE DE NEVANLINNA ET THÉORIE D'ARAKELOV

Par C. Soulé*

P. Vojta s'inspire dans [7] de l'analogie entre la théorie des hauteurs et celle de Nevanlinna pour proposer des conjectures très générales sur les équations diophantiennes en dimension arbitraire. Or on constate que l'extension en dimension supérieure de la théorie d'Arakelov ([1][2]) s'appuie sur les mêmes notions fondamentales que la théorie de Nevanlinna [5], en particulier celle de courants de Green (voir la définition au paragraphe 3.1 ci-dessous). Le but de cet exposé est d'illustrer ce fait dans le cas de l'espace projectif. La théorie de Nevanlinna pour la distribution des valeurs des applications holomorphes d'un espace affine dans un espace projectif utilise des courants appelés "formes de Levine" [4] dont on montre qu'ils donnent les classes de Chern du fibré quotient universel en théorie d'Arakelov. Les résultats exposés ici sont repris de [5] et [2].

1. Forme de Levine [4]

Soient $X = \mathbb{P}^n$ l'espace projectif complexe de dimension, n, $X_0,\ldots,X_n$ des coordonnées homogènes sur X, $p \geq 1$ un entier, et Y la sous-variété de X d'équation

$$X_0 = X_1 = \ldots = X_{p-1} = 0 .$$

On pose

$$\tau = \log\left(|X_0|^2 + |X_1|^2 + \ldots + |X_n|^2\right)$$

et

$$\sigma = \log\left(|X_0|^2 + |X_1|^2 + \ldots + |X_{p-1}|^2\right).$$

* IHES, 35 Route de Chartres, 91440 BURES sur YVETTE

Si $d = \partial + \bar\partial$ est la décomposition standard de la différentielle sur X, on note $d^c = \dfrac{\partial - \bar\partial}{4\pi i}$. La forme $\alpha = dd^c\tau$ est lisse sur X, et $\beta = dd^c\sigma$ est lisse sur X - Y.

On appelle <u>forme de Levine</u> la forme différentielle

(1) $$\Lambda = (\tau - \sigma)\left(\sum_{\nu=0}^{p-1} \alpha^{\nu}\beta^{p-1-\nu}\right)$$

sur X - Y. Si $Z = \sum_i n_i Z_i$ est un cycle sur X, on désigne par $\delta_Z = \sum_i n_i \delta_{Z_i}$ le courant d'intégration sur Z.

<u>THÉORÈME 1</u> [4]

La forme Λ *est intégrable sur* X. *Le courant associé* $[\Lambda]$ *vérifie l'équation*

(2) $$dd^c[\Lambda] = \alpha^p - \delta_Y .$$

<u>PREUVE</u> ([2], Prop. 5.1) :

L'éclaté X' de X le long de Y est la sous-variété de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{p-1}$ formée des couples
$$(x ; y) = (X_0,\ldots,X_n ; Y_0,\ldots, Y_{p-1})$$
tels qu'il existe $t \in \mathbb{C}$ avec

(3) $$X_\alpha = t\, Y_\alpha \quad \text{pour tout } \alpha = 0,\ldots, p-1 .$$

Notons $f : X' \to X = \mathbb{P}^n$ et $g : X' \to Z = \mathbb{P}^{p-1}$ les projections évidentes. En dehors du diviseur $Y' = f^{-1}(Y)$ l'application f est un isomorphisme $X' - Y' \to X - Y$.

- Soit $\mathcal{L}_X$ (resp. $\mathcal{L}_Z$) le faisceau inversible canonique sur X (resp. Z). On peut définir sur X' un morphisme
$$\rho : f^*\mathcal{L}_X \to g^*\mathcal{L}_Z$$
de la façon suivante. Si s est une section de $f^*\mathcal{L}_X$ on a
$$s(x ; y) = (X_0,\ldots,X_n) ,$$
où (X_i) est soit nul, soit un système de coordonées homogènes de x. On pose
$$\rho(s)(x ; y) = (X_0,\ldots,X_{p-1}) .$$

L'équation (3) montre que $\rho(s)$ est une section de $g^*\mathcal{L}_Z$. On vérifie aisément que la section ρ du fibré inversible $g^*\mathcal{L}_Z \otimes f^*\mathcal{L}_X^{-1}$ a pour diviseur Y'.

Si on munit $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_Z$ de leur métrique standard, la norme carrée de ρ est

$$\|\rho\|^2(x\,;y) = \left(|X_0|^2 + \ldots + |X_{p-1}|^2\right) / \left(|X_0|^2 + \ldots + |X_n|^2\right).$$

- Rappelons l'équation de Poincaré-Lelong [3].

Soit L un fibré holomorphe inversible sur une variété complexe X, h une métrique sur L et $s \neq 0$ une section méromorphe de L. Alors la fonction $\log h(s,s)$ est localement intégrable sur X et le courant associé $[\log h(s,s)]$ vérifie l'équation

(4) $$d\,d^c[\log h(s,s)] = \delta_{div(s)} - \omega,$$

où $\omega = c_1(L,h)$ est la première forme de Chern de L associée au choix de la métrique h.

- On a donc

$$d\,d^c\left[\log\|\rho\|^2\right] = \delta_{Y'} + \beta' - \alpha',$$

où α' (resp.β') est la première forme de Chern de $f^*\mathcal{O}_X$ (resp. $g^*\mathcal{O}_Z$). Posons

$$\omega' = \sum_{v=0}^{p-1} (\alpha')^v (\beta')^{p-1-v}$$

et

$$\Lambda' = -\,\omega' \log\|\rho\|^2 .$$

On a

$$\begin{aligned} -dd^c[\Lambda'] &= \delta_{Y'}.\,\omega' + (\beta' - \alpha')\,\omega' \\ &= \delta_{Y'}.\,\omega' + (\beta')^p - (\alpha')^p \\ &= \delta_{Y'}.\,\omega' - \alpha'^{\,p} \end{aligned}$$

puisque β' provient de Z et $\dim Z = p - 1$.

Sur $X' - Y' = X - Y$ on a $\Lambda' = \Lambda$, donc Λ est intégrable et le courant $f_*[\Lambda']$ coincide avec $[\Lambda]$. De plus $\alpha' = f^*(\alpha)$ et $f_*(\alpha')^p = \alpha^p$. Donc $-dd^c[\Lambda] = f_*(\delta_{Y'}.\,\omega') - \alpha^p$

Comme $Y' = Y \times Z$ et

$$\int_Z \left(-c_1(\mathcal{O}_Z)\right)^k = \begin{cases} 1 \text{ si } k = p-1 \\ 0 \text{ sinon}, \end{cases}$$

on obtient

$$f_*(\delta_{Y'}.\,\omega') = \delta_Y$$

d'où l'équation (2) .

2. Théorie de Nevanlinna [5] :

2.1 Soit $m \geq 1$ un entier et

$$f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{P}^n$$

une application holomorphe. On s'intéresse à la question suivante : $f(\mathbb{C}^m)$ rencontre-t-il Y ?

Si $z = (z_i) \in \mathbb{C}^m$ on pose

$$|z|^2 = \sum_{i=1}^{m} |z_i|^2$$

et, si $r > 0$ est un nombre réel,

$$B_r = \left\{ z \in \mathbb{C}^m \text{ tel que } |z| < r \right\}$$

et

$$S_r = \left\{ z \in \mathbb{C}^m \text{ tel que } |z| = r \right\}.$$

Soit $\omega = d\, d^c \log |z|^2$.

On fait l'hypothèse que $f(0)$ n'est pas dans Y et que $f^{-1}(Y)$ est soit vide, soit de codimension p dans $\mathbb{C}^m$. On introduit les fonctions suivantes :

$$T_f^k(r) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{B_t} f^*(\alpha)^k\, \omega^{m-k}, \quad k \geq 0,$$

$$N_f(r) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{f^{-1}(Y) \cap B_t} \omega^{m-p},$$

$$m_f(r) = \frac{1}{2} \int_{S_r} f^*(\Lambda)\, d^c \log |z|^2\, \omega^{m-p},$$

et

$$R_f(r) = \frac{1}{2} \int_{B_r} f^*(\Lambda)\, \omega^{m-p+1}.$$

On notera que $T_f^k(r)$ ne dépend pas de Y et que $R_f(r) = 0$ si $p = 1$ (car $\omega^m = 0$).

THÉORÈME 2 ("1er théorème principal") :

$$N_f(r) + m_f(r) = T_f^p(r) + R_f(r) + 0(1)$$

PREUVE [5] :

D'après le Théorème 1

$$d\, d^c [\Lambda] = \alpha^p - \delta_Y,$$

donc