Astérisque

NICOLAS BERGERON

LAURENT CLOZEL

Spectre automorphe des variétés hyperboliques et applications topologiques

Astérisque, tome 303 (2005)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2005__303__R1_0>

ASTÉRISQUE 303

SPECTRE AUTOMORPHE DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES ET APPLICATIONS TOPOLOGIQUES

Nicolas Bergeron
Laurent Clozel

Société Mathématique de France 2005
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

N. Bergeron

Unité Mixte de Recherche 8553 du CNRS, Département de mathématiques et applications (DMA), 45, rue d'Ulm 75230 Paris Cedex 05, France.

E-mail : `Nicolas.Bergeron@ens.fr`

L. Clozel

Université Paris-Sud, Unité Mixte de Recherche 8628 du CNRS, Laboratoire de Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F75, 32Q45, 11G18, 14G35, 22E47, 22E55, 58J50.

***Mots clefs*.** — Spectre automorphe, variétés arithmétiques, conjectures d'Arthur, cohomologie des variétés localement symétriques.

À Natan, Céline et à toute l'équipe de la crèche parentale « Pic Puce »
sans qui ce livre serait déjà fini depuis quelques mois. *N.B.*

SPECTRE AUTOMORPHE DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES ET APPLICATIONS TOPOLOGIQUES

Nicolas Bergeron, Laurent Clozel

Résumé. — Ce texte comporte deux parties. Dans la première nous étudions le spectre automorphe des variétés hyperboliques. Nous montrons en particulier un théorème « à la Selberg » sur la première valeur propre du laplacien sur les formes différentielles des variétés hyperboliques complexes de congruence. Notre démonstration passe par la théorie des représentations ; à ce titre nous tentons de faire un effort de vulgarisation de la théorie moderne des formes automorphes à l'attention d'éventuels lecteurs géomètres. Dans la deuxième partie du texte nous appliquons les résultats de la première partie à l'étude de la topologie des variétés hyperboliques complexes ; nous obtenons en particulier un théorème de relèvement de classes de cohomologie. La motivation principale de ce travail est donnée par les conjectures d'Arthur : celles-ci impliquent des restrictions très fortes sur le spectre des variétés arithmétiques qui à leur tour impliquent des propriétés conjecturales sur la géométrie des variétés hyperboliques. Ce texte fournit, outre des énoncés précis, la preuve de formes affaiblies de ces conjectures dans des cas particuliers.

Abstract **(Automorphic spectrum of hyperbolic manifolds and topological applications)**

This book is made of two parts. The first is concerned with the differential form spectrum of congruence hyperbolic manifolds. We prove Selberg type theorems on the first eigenvalue of the laplacian on differential forms. The method of proof is representation-theoretic; we hope the different chapters may as well serve as an introduction to the modern theory of automorphic forms and its application to spectral questions. The second part of the book is of a more differential geometric flavor; a new kind of lifting of cohomology classes is proved. The main motivation of this work is given by Arthur's conjectures; these conjectures implies strong restrictions on the spectrum of arithmetic manifolds which, in turn, imply conjectural properties on the geometry of hyperbolic manifolds. Together with precise statements of these conjectures, this text gives proofs of weak forms of them in some particular cases.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction xi
Un programme conjectural xi
Description des résultats xvi

Partie I. Spectre des variétés hyperboliques 1

1. Théorème de Matsushima 3
1.1. Sur l'opérateur de Casimir 5
1.2. Démonstration du Théorème 1.0.2 7
1.3. Représentations admissibles et spectre automorphe 7

2. Spectre du laplacien sur les quotients arithmétiques 11
2.1. Le cas des fonctions 12
2.2. Théorie des représentations 13
2.3. Principe de restriction et démonstration du Théorème 2.1.1 15
2.4. Représentations non isolées et contre-exemples à A^- 18
2.5. Perspectives : contraintes locales et contraintes automorphes 20

3. Représentations de $\mathrm{GL}(n)$ 23
3.1. Classification de Langlands 23
3.2. Correspondance de Langlands locale 25
3.3. Un peu de fonctions L 28
3.4. Dual unitaire 31

4. Représentations de $\mathrm{U}(n,1)$ 35
4.1. Classification de Langlands 36
4.2. Groupe dual 42
4.3. Paramètres de Langlands 44
4.4. Classification et paramètres de Langlands 47
4.5. K-types des représentations induites, action du Casimir 50
4.6. Représentations de $\mathrm{U}(2,1)$ 51

5. Représentations de $\mathrm{U}(a,b)$ $(a,b>1)$ 55
5.1. Groupe dual 55
5.2. Représentations cohomologiques 56
5.3. Paramètres des $A_{\mathfrak{q}}$ en dualité de Langlands 60
5.4. Représentations cohomologiques isolées 61

6. Conséquences des Conjectures d'Arthur 65
6.1. Paramètres d'Arthur 65
6.2. $G=\mathrm{U}(n,1)$ 66
6.3. $G=\mathrm{SO}(n,1)$, n impair 74
6.4. $G=\mathrm{SO}(n,1)$, n pair 81
6.5. Existence des représentations exceptionnelles 83

7. Théorème de Luo-Rudnick-Sarnak 85
7.1. Fonction L de Rankin-Selberg 85
7.2. Démonstration du Théorème 7.0.1 94
7.3. Application : le théorème de Selberg 98

8. Démonstration du Théorème 1 101
8.1. Description du groupe G 101
8.2. $D=M_3(K)$ 102
8.3. $D\neq M_3(K)$ 105
8.4. Une Conjecture de changement de base 105

9. Démonstration du Théorème 2 111
9.1. Fonctions radiales, coefficients matriciels et fonctions sphériques 111
9.2. Fonctions sphériques du groupe $\mathrm{U}(n,1)$ 113
9.3. L'équation différentielle radiale 116
9.4. Comportement asymptotique 117
9.5. Démonstration du Théorème 2 120

10. Démonstration du Théorème 3 127
10.1. Vrais groupes unitaires 127
10.2. Groupes exotiques : réductions 128
10.3. Contrôle du spectre pour les groupes exotiques de rang premier 130
10.4. Démonstration du Théorème 3 136

Partie II. Homologie des variétés hyperboliques 139

11. L'espace hyperbolique complexe 141
11.1. Modèle de l'hyperboloïde et modèle projectif 141
11.2. Modèle de la boule 142
11.3. Structure kaehlérienne 142
11.4. Courbure 143
11.5. Volume des boules 144

12. Espaces symétriques associés aux groupes unitaires ... 147
12.1. Préliminaires ... 147
12.2. Sous-espaces totalement géodésiques ... 148
12.3. Croissance du volume ... 152
12.4. Fonction distance à l'hypersurface ... 157
12.5. Séries de Poincaré ... 162

13. Construction de la forme duale ... 167
13.1. Formes singulières de Bott et Chern ... 167
13.2. Construction de la forme duale ... 171
13.3. Précisions dans le cas hyperbolique complexe ... 177
13.4. Tours de revêtements finis ... 181

14. Cohomologie L^2 réduite ... 187
14.1. Rappels sur la cohomologie L^2 ... 188
14.2. Théorie de Hodge des variétés kaehlériennes faiblement pseudoconvexes 189
14.3. Un théorème d'Ohsawa et Takegoshi ... 190
14.4. Démonstration du Théorème 14.0.6 ... 193

15. Démonstrations des Théorèmes 4, 5 et 8 ... 195
15.1. Démonstration du Théorème 4 ... 195
15.2. Variétés arithmétiques ... 198
15.3. Rappels sur les variétés kaehlériennes ... 202
15.4. Démonstration du Théorème 5 ... 204

Bibliographie ... 207

Index des notations ... 215

Index terminologique ... 217