

Astérisque

XAVIER BUFF

Ensembles de Julia de mesure positive

Astérisque, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki, exp. n° 820, p. 7-39

http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__7_0

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ENSEMBLES DE JULIA DE MESURE POSITIVE

[d'après van Strien et Nowicki]

par **Xavier BUFF**

CORRIGENDUM

Nous avons malheureusement découvert après l'exposé, que le dernier lemme 11, est faux. La seule majoration qu'on puisse y obtenir est en C/n . Ce lemme est crucial, et nous n'avons pas réussi à le contourner. Le problème ne semble pas insurmontable, mais le théorème principal 1 n'est donc toujours pas démontré à ce jour.

Cependant tous les autres résultats restent valables, et consistent en une avancée considérable dans l'étude des ensembles de Julia, et en particulier dans la recherche d'ensembles de Julia de mesure strictement positive.

1. INTRODUCTION

Comme l'a remarqué Sullivan, il existe une forte analogie entre les ensembles limites de groupes kleinien de type fini, et les ensembles de Julia des applications rationnelles de $\overline{\mathbb{C}}$. Une conjecture attribuée à Ahlfors exprime que les ensembles limites de groupes kleinien de type fini sont toute la sphère $\overline{\mathbb{C}}$ ou ont une aire nulle. Cette conjecture a été démontrée dans de nombreux cas (cf [T], [C], ou [Bo]). Par analogie, on conjecturait que les ensembles de Julia des polynômes avaient une aire nulle. Ceci a été démontré en particulier dans le cas hyperbolique et le cas "géométriquement fini". Pour les polynômes cubiques ayant un point critique qui s'échappe et non renormalisables (tableau non périodique dans [BH]), McMullen a fait une démonstration qui est une variante du résultat de Branner et Hubbard : l'ensemble de Julia est un Cantor. Pour les polynômes quadratiques finiment renormalisables, Lyubich a montré que l'ensemble de Julia était de mesure nulle [L3], en adaptant la démonstration de connexité locale de Yoccoz. Les techniques utilisées pour ces deux derniers résultats ne s'étendent pas en degré supérieur : la méthode repose sur la divergence d'une série définie de façon combinatoire et il se trouve qu'en degré supérieur, ladite série converge.

En fait, la conjecture est fautive : van Strien et Nowicki ont exhibé des polynômes ayant

un ensemble de Julia de mesure de Lebesgue strictement positive. Ce sont des polynômes définis de manière combinatoire et appelés “polynômes de Fibonacci”.

THÉORÈME 1.—*Il existe un entier ℓ_0 tel que pour tout entier pair $\ell \geq \ell_0$,*

- *il existe un unique polynôme de Fibonacci de la forme $P(z) = z^\ell + c$, avec $c \in \mathbb{R}$, et*
- *la mesure de Lebesgue de son ensemble de Julia $J(P)$, est strictement positive.*

L'intérêt des polynômes de Fibonacci a été souligné par Branner et Hubbard [BH] pour les polynômes complexes cubiques, par Yoccoz [Y] pour les polynômes quadratiques, et par Hofbauer et Keller [HK] pour les fonctions unimodales. Dans [LM], Lyubich et Milnor étudient la restriction à l'axe réel dans le cas d'un polynôme de Fibonacci quadratique, et Lyubich élargit cette étude au plan complexe dans [L1] et [L2]. L'existence d'un polynôme de Fibonacci réel en degré $\ell > 2$ est démontrée par Hoffbauer et Keller. Elle découle d'un argument combinatoire de Milnor et de Thurston. Dans [BKNS], Bruin, Keller, Nowicki et van Strien ont montré un résultat analogue au Théorème 1, dans le cadre réel, ce qui a été un point de départ pour l'étude complexe.

Enfin, remarquons que le théorème affirme que si le degré est suffisamment grand, alors il existe des polynômes ayant un ensemble de Julia de mesure strictement positive. Cependant, la démonstration ne donne pas une valeur explicite pour ℓ_0 , et pour en obtenir une, il reste un travail considérable. Signalons simplement que des expériences numériques de Lyubich et Sutherland suggèrent $\ell_0 = 32$.

Nous nous proposons d'exposer les grandes lignes de la démonstration de van Strien et Nowicki concernant la mesure positive, telle que nous la comprenons. Nous ne donnerons que l'énoncé des lemmes et propositions qui interviendront. Pour les démonstrations, le lecteur pourra consulter [SN] ou [Bu].

Nous aimerions remercier Adrien Douady et Marguerite Flexor pour l'aide qu'ils nous ont apportée tout au long de la préparation de cet exposé, et Sebastian van Strien pour les fructueuses discussions que nous avons eues avec lui.

2. IDÉE PRINCIPALE

Commençons par rappeler la définition des ensembles de Julia. Soit $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme. L'ensemble de Julia rempli $K(P)$ de P est l'ensemble des points dont l'orbite sous l'action de P est bornée. Dans la suite, $P^{(n)}$ désignera le n -ième itéré de P , par opposition à P^ℓ qui désignera la puissance ℓ -ième de P . L'ensemble de Julia rempli est un compact. On peut également le définir par :

$$K(P) = \{z \in \mathbb{C} \mid P^{(n)}(z) \not\rightarrow \infty\}.$$

L'ensemble de Julia $J(P)$ de P , est le bord de $K(P)$:

$$J(P) = \partial K(P).$$

Dans le cas qui nous intéresse, P sera un polynôme de Fibonacci réel. En particulier, il aura un unique point critique récurrent. En utilisant la classification de Fatou-Sullivan des composantes de l'intérieur de $K(P)$, nous montrerons que

$$J(P) = K(P).$$

L'idée de van Strien et Nowicki pour montrer que $K(P)$ est de mesure de Lebesgue positive est d'utiliser un argument de marche aléatoire.

DÉFINITION 1.—Un jeu (X, μ, ψ, g) est la donnée de :

- un espace X muni d'une mesure de probabilité μ ,
- une application jeu, $\psi : X \rightarrow X$,
- une fonction gain, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in X$ nous pouvons définir :

- la position après le n -ième coup : $x_n = \psi^{(n)}(x)$,
- le gain au n -ième coup : $g_n(x) = g(x_{n-1})$, et
- le capital amassé après le n -ième coup : $G_n(x) = g_1(x) + \dots + g_n(x)$.

Soit S l'ensemble des positions gagnantes, c'est-à-dire

$$S = \{x \in X \mid (\forall n \geq 1) G_n(x) > 0\}.$$

Nous dirons qu'un jeu est **gagnant** si et seulement si $\mu(S) > 0$. Il existe des critères probabilistes que nous mentionnerons plus loin, pour montrer qu'un jeu est gagnant.

Pour utiliser cet argument de marche aléatoire, le principe développé par van Strien et Nowicki est de construire un jeu gagnant, associé au polynôme de Fibonacci P , et dont l'ensemble S des positions gagnantes est inclus dans l'ensemble de Julia rempli $K(P)$. Pour cela ils commencent par définir une partition du plan complexe en anneaux emboîtés, A_k , $k \in \mathbb{Z}$.

- L'espace $X = \bigcup_{k \geq 0} A_k$ est muni d'une mesure proportionnelle à la mesure de Lebesgue.
- L'application ψ est l'identité sur $A_0 \cup A_1$, et coïncide pour $k \geq 2$ avec un itéré $P^{(S_k)}$ de P sur A_k (où $S_k \in \mathbb{N}$). Remarquons que si l'orbite d'un point rentre dans A_0 ou dans A_1 , le jeu est arrêté.
- Le gain $g(z)$ est déterminé par les positions respectives de z et de $\psi(z)$: si $z \in A_k$ et $\psi(z) \in A_m$, on pose $g(z) = m - k$.

Dans ces conditions, si $z \in S$ est une position gagnante, alors $G_n(z) > 0$ pour tout $n \geq 1$. Par conséquent $S \subset \bigcup_{k \geq 2} A_k$. D'autre part, si $z \in A_k \cap S$, alors pour tout $n \geq 1$, $\psi^{(n)}(z) \in A_m$

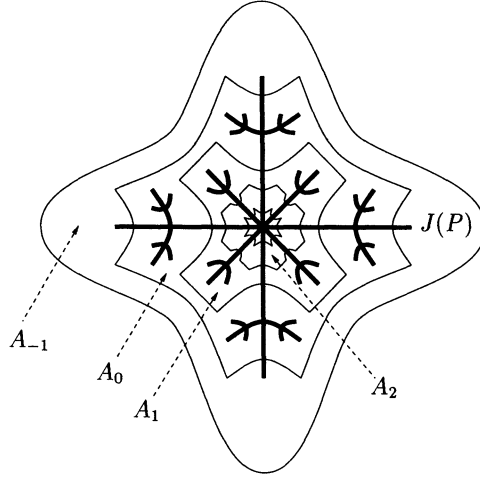


FIG. 1 – $\psi|_{A_k} = P^{(S_k)}$; $G|_{A_k} = k$; $g = G \circ \psi - G$.

avec $m > k$. Par suite, l'orbite sous ψ de z reste dans la composante bornée de $\mathbb{C} \setminus A_k$, et l'orbite de z sous l'action de P ne peut pas diverger vers l'infini. Par conséquent $S \subset K(P) = J(P)$. Ainsi, si nous montrons que le jeu est gagnant, la démonstration sera achevée. Toute la difficulté du travail de van Strien et Nowicki réside dans la construction d'un jeu gagnant du type précédent.

3. POLYNÔMES DE FIBONACCI

Dans cette partie, nous allons donner la définition réelle des polynômes de Fibonacci que van Strien et Nowicki utilisent. Nous exposerons ensuite quelques propriétés qui nous permettront de construire le jeu de Fibonacci.

3.1. Définition

Van Strien et Nowicki abordent le problème avec des techniques réelles. Ils utilisent la définition de Lyubich et Milnor [LM], §4.

DÉFINITION 2.—Soit $P(x) = x^\ell + c$ un polynôme réel ($c \in \mathbb{R}$) de degré ℓ pair. Soit S_k la suite de Fibonacci définie par

$$\begin{cases} S_{k+1} &= S_k + S_{k-1} \\ S_0 &= 1 \\ S_1 &= 2. \end{cases}$$

Soient $c_0 = 0$ le point critique de P et $c_n = P^{(n)}(c_0)$. Nous dirons que P est un **polynôme**

de Fibonacci, si

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|c_{S_{k+1}}| < |c_{S_k}|$, et
- $|c_3| < |c_4|$.

Les propriétés réelles de ces polynômes ont été étudiées par Lyubich et Milnor dans [LM], dans le cas quadratique. Les propriétés combinatoires se généralisent aisément pour les degrés supérieurs. L'existence de polynômes de Fibonacci ne pose donc aucun problème : il suffit de reprendre les arguments de Lyubich et Milnor. En revanche, ce genre d'arguments ne permet plus de montrer qu'il existe un unique polynôme de Fibonacci pour chaque degré ℓ pair, car les estimées géométriques qu'ils obtiennent ne sont plus valides. Nous ne reprendrons pas la démonstration de van Strien et Nowicki concernant l'unicité du polynôme de Fibonacci pour chaque degré ℓ pair, qui repose sur des estimées obtenues dans [BKNS]. Nous allons maintenant exposer des résultats complexes concernant les polynômes de Fibonacci.

3.2. Propriétés complexes

Tout d'abord, la classification de Fatou-Sullivan des composantes de l'intérieur de $K(P)$ permet de montrer que $\overset{\circ}{K}(P) = \emptyset$.

LEMME 1.—*Soit $P(z) = z^\ell + c$ un polynôme réel ($c \in \mathbb{R}$). Si l'intérieur de $K(P)$ n'est pas vide, alors l'orbite du point critique 0 est attirée par un cycle périodique.*

Comme l'orbite du point critique d'un polynôme de Fibonacci se rapproche de 0 aux itérés de Fibonacci, elle ne peut pas être attirée par un cycle périodique. Par conséquent $K(P)$ est d'intérieur vide, et

$$J(P) = K(P).$$

En ce qui concerne les propriétés complexes des polynômes de Fibonacci, Branner et Hubbard donnent des informations topologiques à l'aide de tableaux ([BH], page 131). Le résultat principal qui intéresse van Strien et Nowicki est traduit sur les figures 2 et 3. Le lecteur pourra trouver une démonstration complète dans [SN], Théorème 8.1, ou dans [Bu]. Il peut être énoncé de la manière suivante.

PROPOSITION 1.—*Soit $P(z) = z^\ell + c$ un polynôme de Fibonacci réel. Il existe des disques topologiques D_k , D_k^0 et D_k^1 pour $k \geq 0$, définis par récurrence à partir de D_0 et D_1 , tels que*

- $c_0 \in \overline{D_{k+2}} \subset D_k^0$,
- $\overline{D_{k+1}^1} \subset D_k^0$,
- $\overline{D_k^0} \subset D_k$,
- $P^{(S_{k-1})}$ envoie D_k^1 sur D_k de manière isomorphe, et

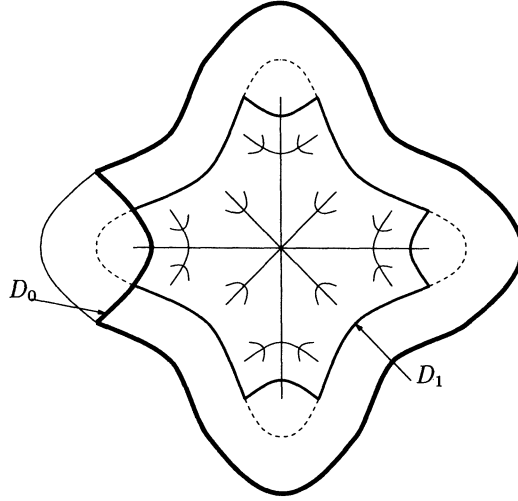


FIG. 2 – Les pièces D_0 et D_1 délimitées par des équipotentiels et des rayons externes.

- $P^{(S_k)}$ est un revêtement de degré ℓ , ramifié en c_0 de D_k^0 , D_{k+1} et D_{k+2} dans respectivement D_k et D_{k-1} et D_k^1 .

Ces disques topologiques sont des pièces du puzzle de Yoccoz, délimitées par des équipotentiels et des rayons externes. Comme le polynôme est de la forme $P(z) = z^\ell + c$, les pièces qui contiennent c_0 sont invariantes par rotation d'angle $2\pi/\ell$. Pour plus de renseignements concernant les puzzles de Yoccoz, le lecteur peut consulter [B], [BH], [H] ou [M]. Nous allons maintenant construire le jeu de Fibonacci que van Strien et Nowicki utilisent ([SN], §VI).

3.3. Jeu de Fibonacci

DÉFINITION 3.—Soit P un polynôme de Fibonacci, et soient D_k les disques de la proposition 1. Pour $k \geq 0$, nous pouvons définir les anneaux

$$A_k = D_{k+1} \setminus D_{k+2}.$$

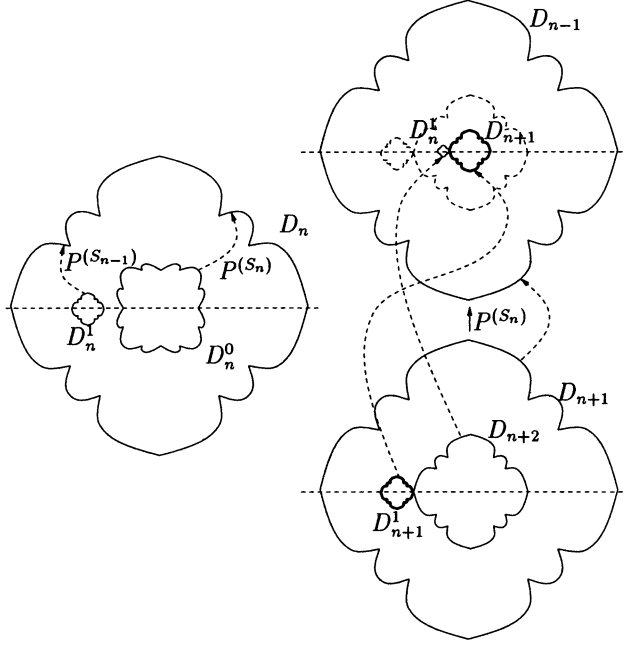
Le jeu de Fibonacci est défini par :

- l'espace $X = D_1$ est la réunion des anneaux A_k , $k \geq 0$;
- la mesure de probabilité μ est proportionnelle à la mesure de Lebesgue m :

$$\mu(\cdot) = \frac{m(\cdot)}{m(D_1)} ;$$

- l'application jeu ψ est définie par

$$\begin{aligned} \psi|_{A_k} &= P^{(S_k)} \quad \text{si } k \geq 2, \\ \psi|_{A_k} &= \text{Id} \quad \text{si } k = 0 \text{ ou } 1 ; \end{aligned}$$

FIG. 3 – Schémas de Fibonacci associés aux pièces D_k .

- le gain g est défini par $g(z) = l - k$, pour $z \in A_k$ et $\psi(z) \in A_l$.

Pour se faire une idée de ce jeu, nous avons représenté topologiquement la situation sur la figure 4. Les anneaux A_k sont représentés comme des anneaux euclidiens. Les petits cercles concentriques délimitent les régions où le gain est constant et positif. Nous pouvons remarquer que le jeu dans l'anneau A_{k+1} ressemble au jeu dans l'anneau A_k . Nous précisons cette idée dans la partie 5. Pour le moment il nous faut montrer que le jeu de Fibonacci est un jeu gagnant. Pour cela, van Strien et Nowicki utilisent une version quantitative de la loi des grands nombres.

4. L'ARGUMENT DE MARCHE ALÉATOIRE

Dans cette partie, nous allons exposer un argument de marche aléatoire qui permet de montrer que le jeu de Fibonacci est gagnant. Pour une démonstration complète des propositions, le lecteur pourra consulter [Bu].

4.1. Jeu de pile ou face (équilibré)

Si nous jouons à un jeu équitable, le gain au bout de n coups est négligeable devant n^β pour tout $\beta > 1/2$.

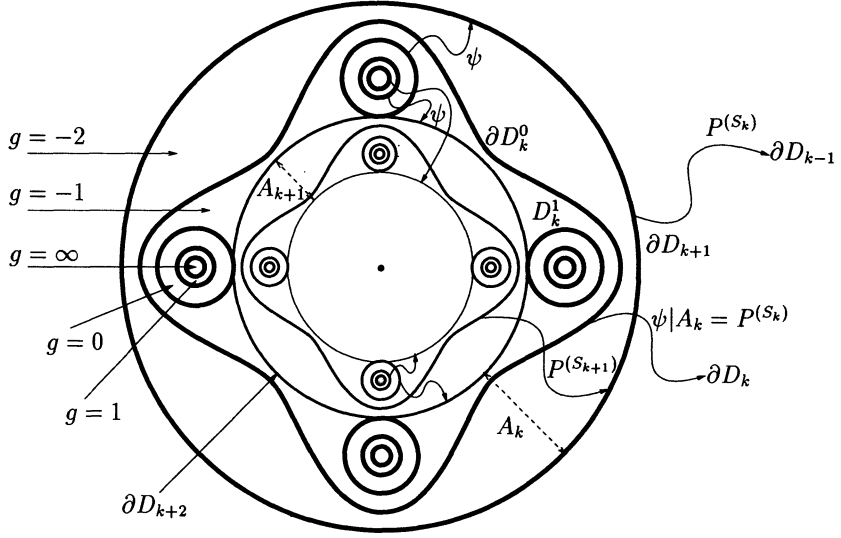


FIG. 4 – Le jeu de Fibonacci et les régions où le gain est constant.

Ici, l'espace X sera l'ensemble des suites de -1 et de 1 :

$$X = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}.$$

La mesure de probabilité μ est la mesure équilibrée. Dans un premier temps, nous allons jouer avec un jeu équilibré. Pour tout $x = x_1 \dots x_n \dots \in X$, le gain g vaut

$$g(x) = x_1,$$

et l'application de jeu n'est rien d'autre que le décalage (shift) :

$$\psi(x_1 x_2 \dots x_n \dots) = x_2 \dots x_n \dots,$$

de sorte que le gain au n -ième coup vaut $g_n(x) = x_n$. Un théorème classique de probabilité affirme que

PROPOSITION 2.—*Pour tout $\beta > 1/2$ et pour presque tout $x \in X$, la fonction qui à n associe le capital amassé en n coups, est un $o(n^\beta)$:*

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n g_k(x) = o(n^\beta).$$

Remarquons que dans cette situation l'espérance de gain, $E(g)$, est nulle. Il existe une variante de ce théorème lorsque l'espérance n'est plus nulle.

4.2. Jeu faussé

Si nous jouons avec un jeu faussé en notre faveur, et que nous bénéficions d'un crédit illimité, nous avons toutes les chances de devenir infiniment riches.

Supposons que le jeu n'est plus équilibré. C'est-à-dire que le gain g_n est défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \alpha & \text{si } x_n &= +1 \\ g_n(x) &= \beta & \text{si } x_n &= -1 \end{aligned}$$

avec $\alpha + \beta = 2E > 0$.

COROLLAIRE 1.—*Pour presque tout $x \in X$, $G_n(x) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.*

En effet $g_n = E + g'_n$, où g'_n est associé à un jeu d'espérance nulle. Alors le capital est $G_n = nE + G'_n = nE + o(n^\beta)$ presque sûrement. Par conséquent $G_n(x) \rightarrow +\infty$.

4.3. Modification du jeu (jeu avec crédit illimité)

Nous avons rappelé des résultats valides pour des jeux dont les coups sont indépendants. Dans le cas qui nous intéresse, les coups ne le sont pas. Cependant, nous pouvons adapter les résultats.

Soit X un espace, muni d'une mesure de probabilité μ , soit ψ une application jeu et g une application gain. On suppose qu'il existe une partition $\mathcal{A}_1 = (A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de X telle que g est constante sur chaque partie de $\mathcal{A}_1$. Définissons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partition $\mathcal{A}_n$ de X en parties

$$A_{i_0, \dots, i_{n-1}} = \{x \mid \psi^{(j)}(x) \in A_{i_j}, j = 0, \dots, n-1\},$$

ainsi que les fonctions "gain au n -ième coup", (g_n) , $n \in \mathbb{N}$, constantes sur chaque partie de $\mathcal{A}_{n+1}$. Posons $G_n = g_1 + \dots + g_n$, le capital accumulé après n coups, et écrivons $g_n = E_n + H_n$, où E_n est constante sur chaque partie de $\mathcal{A}_n$ et H_n est de moyenne nulle sur chaque partie de $\mathcal{A}_n$. Remarquons que si $A \in \mathcal{A}_n$, alors

$$E_n|A = \frac{1}{\mu(A)} \int_A g_n d\mu(x)$$

est une espérance conditionnelle.

Pour un jeu dont les coups ne sont pas indépendants, l'analogie de la proposition 1 peut être énoncé de la manière suivante

PROPOSITION 3.—*S'il existe un réel $V \in \mathbb{R}$ tel que $\int_X H_n^2 \leq V$, alors pour presque tout $x \in X$, et pour tout $\beta < 1/2$*

$$\sum_{k=1}^n H_k(x) = o(n^\beta).$$

Nous en déduisons alors immédiatement l'analogie du corollaire 1.