

Cours Spécialisés

COLLECTION SMF



**INTRODUCTION À LA
THÉORIE ANALYTIQUE ET
PROBABILISTE DES NOMBRES**

Numéro 1

1 9 9 5

Gérald Tenenbaum

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Comité de Rédaction

Michèle AUDIN
Daniel BARLET (Directeur)
Jean-Benoît BOST
Paul-Louis HENNEQUIN

Rémi LANGEVIN
François LOESER
Joseph OESTERLÉ
Pierre SCHAPIRA

Diffusion

S.M.F. (vente directe)
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05, France

MAISON DE LA S.M.F.
Société Mathématique de France
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 09
France

OFFILIB
48, Rue Gay-Lussac
75240 Paris Cedex 05
France

A.M.S.
American Mathematical Society
P.O. BOX 6248, Providence
Rhode Island 02940, USA

Tarifs

(frais de port non compris)

Prix membre S.M.F. : 300 FF
Prix membre A.M.S. : 400 FF (80\$)
Prix public : 450 FF

Directeur de la publication : R. Langevin
Secrétariat technique de la Rédaction et Administration : Nathalie Christiaën
Couverture : Armelle Stoskopf

© Société Mathématique de France 1995

Introduction
à la théorie analytique
et probabiliste des nombres

Gérald Tenenbaum

Professeur à l'Université Henri Poincaré–Nancy 1

classification AMS : 11-01

A Catherine Jablon,

*pour la douceur du jour,
ce bouquet de symboles
dont ta conversation
éclaire les secrets.*

Table des Matières

| | |
|--|------|
| Avant-propos | xiii |
| Notations | xv |
| Tome I : Méthodes élémentaires | 1 |
| Chapitre I.0. Quelques outils d'analyse réelle | 3 |
| § 0.1. La sommation d'Abel | 3 |
| § 0.2. La formule sommatoire d'Euler–Maclaurin | 5 |
| Exercices | 8 |
| Chapitre I.1. Les nombres premiers | 9 |
| § 1.1. Introduction | 9 |
| § 1.2. Les estimations de Tchébychev | 10 |
| § 1.3. Valuation p -adique de $n!$ | 13 |
| § 1.4. Le premier théorème de Mertens | 14 |
| § 1.5. Deux nouvelles formules asymptotiques | 15 |
| § 1.6. La formule de Mertens | 17 |
| § 1.7. Un autre théorème de Tchébychev | 19 |
| Notes | 20 |
| Exercices | 21 |
| Chapitre I.2. Fonctions arithmétiques | 23 |
| § 2.1. Définitions | 23 |
| § 2.2. Exemples | 23 |
| § 2.3. Séries de Dirichlet formelles | 25 |
| § 2.4. L'anneau des fonctions arithmétiques | 26 |
| § 2.5. Les formules d'inversion de Möbius | 29 |
| § 2.6. La fonction de von Mangoldt | 30 |
| § 2.7. La fonction indicatrice d'Euler | 32 |
| Notes | 34 |
| Exercices | 35 |
| Chapitre I.3. Ordres moyens | 37 |
| § 3.1. Introduction | 37 |
| § 3.2. Le problème de Dirichlet et le principe de l'hyperbole | 37 |
| § 3.3. La fonction somme des diviseurs | 40 |
| § 3.4. La fonction indicatrice d'Euler | 40 |

| | |
|--|-----|
| § 3.5. Les fonctions ω et Ω | 42 |
| § 3.6. Valeur moyenne de la fonction de Möbius et fonctions sommatoires de Tchébychev | 43 |
| § 3.7. Entiers sans facteur carré | 47 |
| § 3.8. Valeur moyenne d'une fonction multiplicative à valeurs dans $[0, 1]$ | 49 |
| Notes | 52 |
| Exercices | 54 |
| Chapitre I.4. Méthodes de crible | 57 |
| § 4.1. Le crible d'Ératosthène | 57 |
| § 4.2. Le crible combinatoire de Brun | 58 |
| § 4.3. Application aux nombres premiers jumeaux | 61 |
| § 4.4. Le grand crible – forme analytique | 63 |
| § 4.5. Le grand crible – forme arithmétique | 70 |
| § 4.6. Applications | 72 |
| Notes | 75 |
| Exercices | 78 |
| Chapitre I.5. Ordres extrémaux | 82 |
| § 5.1. Introduction et définitions | 82 |
| § 5.2. La fonction $\tau(n)$ | 83 |
| § 5.3. Les fonctions $\omega(n)$ et $\Omega(n)$ | 85 |
| § 5.4. La fonction d'Euler $\varphi(n)$ | 86 |
| § 5.5. Les fonctions $\sigma_\kappa(n), \kappa > 0$ | 87 |
| Notes | 89 |
| Exercices | 90 |
| Chapitre I.6. La méthode de van der Corput | 92 |
| § 6.1. Introduction et rappels | 92 |
| § 6.2. Intégrales trigonométriques | 93 |
| § 6.3. Sommes trigonométriques | 94 |
| § 6.4. Application au théorème de Voronoï | 98 |
| Notes | 101 |
| Exercices | 103 |
| Tome II : Méthodes d'analyse complexe | 105 |
| Chapitre II.1. Fonctions génératrices : séries de Dirichlet | 107 |
| § 1.1. Séries de Dirichlet convergentes | 107 |
| § 1.2. Séries de Dirichlet des fonctions multiplicatives | 108 |
| § 1.3. Propriétés analytiques fondamentales des séries de Dirichlet | 109 |