MÉMOIRES DE LA S. M. F.

D. BERTRAND
M. EMSALEM
F. GRAMAIN
M. HUTTNER
M. LANGEVIN
M. LAURENT
M. MIGNOTTE
J.-C. MOREAU
P. PHILIPPON
E. REYSSAT
M. WALDSCHMIDT

Les nombres transcendants

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 13 (1984)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_13__1_0>

LES NOMBRES TRANSCENDANTS

ERA 979

D. BERTRAND, M. EMSALEM,
F. GRAMAIN, M. HUTTNER,
M. LANGEVIN, M. LAURENT,
M. MIGNOTTE, J.-C. MOREAU,
P. PHILIPPON, E. REYSSAT,
M. WALDSCHMIDT.

SOMMAIRE

0037-9484/84 01 01 60/$ 8.00/ © Gauthier-Villars

AVIS AU LECTEUR

Ceci est un travail collectif d'une équipe de recherche dont les membres ont ceci de commun qu'ils n'ont jamais pu s'arracher au mystère et à l'envoûtement transcendant des nombres. Cet aspect collectif a conduit a une grande pluralité de styles. Elles s'accompagne de plusieurs redites dont nous nous excusons ici. Mais sont-elles vraiment néfastes ? Un clou est rarement enfoncé d'un seul coup de marteau.

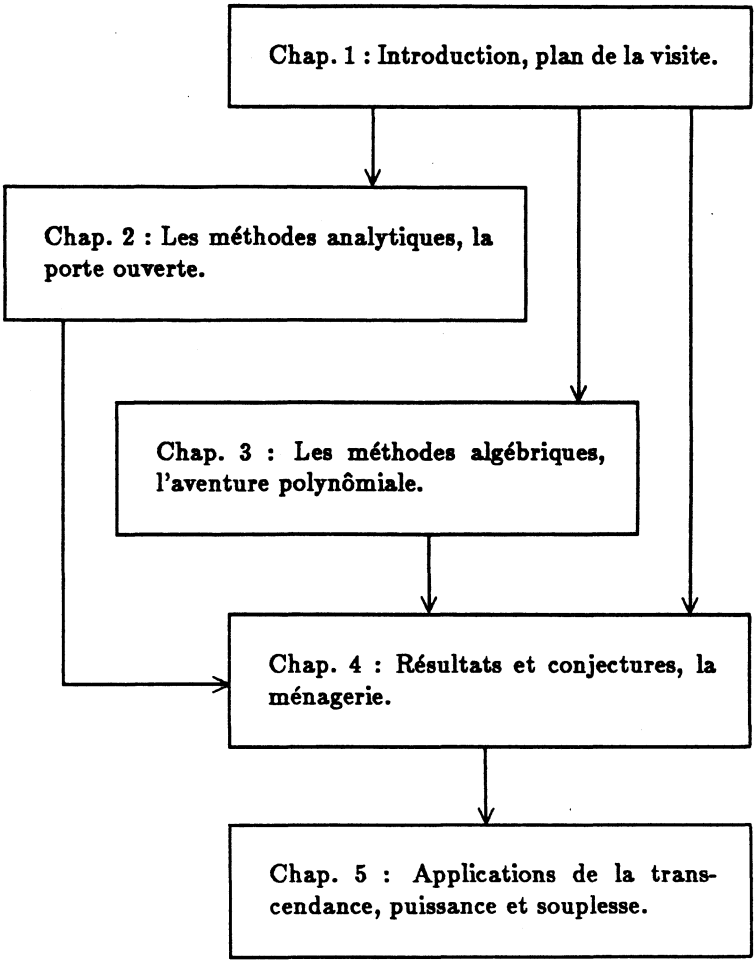
Un mot maintenant sur le contenu. Nous n'avons pas voulu faire un panorama encyclopédique de la théorie des nombres trascendants (un tel but étant hors de propos dans le cadre que nous nous étions fixé), aussi ne s'étonnera-t-on pas que beaucoup de travaux relatifs à la transcendance soient à peine mentionnés, voire passés sous silence. Que les auteurs de tels travaux qui liraient cette plaquette ne nous en tiennent pas rigueur. Nous avons développé les facettes de la théorie qui nous paraissent en ce moment (peut-être à tort) importantes et semblent devoir influencer les recherches ultérieures. Ce texte est donc parfaitement localisé dans l'espace et dans le temps, un simple coup d'oeil suffira au spécialiste pour affirmer en toute certitude qu'il a pris forme fin mil neuf cent quatre vingt deux parmi les gens qui se retrouvaient alors à l'I.H.P. pour travailler sur la théorie des nombres transcendants.

Nous remercions aussi Mme Lutzing-Braun qui avait réalisé la frappe d'une première version de ce fascicule ; ceci en un temps fort limité.

Et maintenant, en piste

que commence la TRANSE
A
DANSE
S

POUR NE PAS S'ÉGARER



Posologie : Pour éviter toute allergie, il est fortement recommandé d'absorber en priorité le chapitre 1 dans son intégralité avant de goûter aux chapitres suivants.

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION – PRÉSENTATION DU TEXTE

> **Il vaudrait mieux que nous n'abordions pas le problème de la transcendance ; on ne peut rien dire de profitable là-dessus.**
>
> **Julio CORTAZAR.**
> **Les gagnants, chap. 29.**

1. De Hermite à Siegel.

La théorie des Nombres Transcendants est née en 1844 lorsque Liouville construisit une classe "très étendue" de nombres ne vérifiant aucune équation polynômiale à coefficients entiers. Sa démonstration est bien connue : soit α un nombre algébrique irrationnel de degré d et soit p/q un nombre rationnel. Considérons le polynôme minimal P de α et supposons $|\alpha - p/q| \leq 1$. Le nombre non nul $P(p/q)$ vérifie alors

$$|P(p/q)| \geq q^{-d}$$

et

$$|P(p/q)| = |P(p/q) - P(\alpha)| \leq |\alpha - p/q| \sup_{|z-\alpha|\leq 1} |P'(z)|.$$

D'où l'inégalité

$$|\alpha - p/q| \geq Cq^{-d}$$

où

$$C = \max\{1, \sup_{|z-\alpha|\leq 1} |P'(z)|\}^{-1}.$$

Par conséquent, si un nombre irrationnel ξ est limite d'une suite (p_n/q_n) de rationnels telle que, pour tout entier D, on ait $q_n^D|\xi - p_n/q_n| \to 0$ si $n \to \infty$, alors ξ ne peut être algébrique (exemple :

$$\xi = \sum_{n\geq 1} 2^{-n!},$$

et même une infinité non dénombrable de nombres transcendants,

$$\xi_\epsilon = \sum_{n\geq 1} \epsilon_n 2^{-n!} \quad \text{où} \quad \epsilon_n \in \{0,1\} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \epsilon_n = +\infty).$$

Trente ans plus tard, Cantor démontre que l'ensemble des réels est non dénombrable tandis que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, donc que "presque" tous les nombres réels ou complexes sont transcendants.

Mais, un an auparavant, en 1873, une autre grande étape a été franchie : Hermite a prouvé la transcendance de e. La technique consiste à approcher la fonction exponentielle par certaines fractions rationnelles. Plus précisément, pour tout système de nombres rationnels $w_0, \dots, w_m$ et d'entiers $r_0, \dots, r_m$, avec $r_0 + \cdots + r_m = s$, il construit explicitement $(m+1)$ polynômes à coefficients rationnels $U_0, \dots, U_m$ de degrés respectifs majorés par

$$s - r_0, s - r_1, \dots, s - r_m$$

tels que pour $0 \leq k < l \leq m$ la fonction

$$U_k(z)e^{w_l z} - U_l(z)e^{w_k z}$$

s'annule à l'origine à un ordre au moins égal à s. En faisant $z = 1$ dans ces formules, il obtient des approximations rationnelles simultanées des nombres $1, e, e^2, \dots, e^m$, lesquelles sont si bonnes qu'elles permettent de démontrer l'indépendance linéaire (sur $\mathbf{Q}$) de ces nombres et donc la transcendance de e.

Vingt ans plus tard, Hermite obtiendra, toujours explicitement, de nouvelles relations fonctionnelles approchées reliant différentes fonctions exponentielles : il construit des polynômes à coefficients entiers $A_0, \dots, A_m$ tels que la combinaison linéaire $A_0(z)e^{w_0 z} + \cdots + A_m(z)e^{w_m z}$ s'annule en 0 à l'ordre $m + \deg A_0 + \cdots + \deg A_m$. Hermite cependant n'appliqua pas cette construction à des problèmes de transcendance, peut-être en raison des progrès considérables qui avaient été réalisés dans ce domaine depuis sa découverte de la transcendance de e.

En 1882, Lindemann avait prouvé la transcendance du nombre π — et donc l'impossibilité de la quadrature du cercle — en développant les méthodes d'Hermite. Il énonça un théorème plus général, dont il esquissa la démonstration, et cette démonstration fut rédigée complètement par Weierstrass. Il s'agit du résultat suivant.

THÉORÈME 1 (Lindemann-Weierstrass). — *Soient $w_1, \dots, w_k$ des nombres algébriques linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$, alors les nombres $e^{w_1}, \dots, e^{w_k}$ sont algébriquement indépendants sur le corps $\overline{\mathbf{Q}}$ des nombres algébriques.*

De 1885 à 1893, ces travaux ont suscité la recherche de nombreuses variantes ou simplifications des preuves d'Hermite et de Lindemann par Gordan, Hurwitz, Hilbert,... Une étude comparée de ces diverses démonstrations se trouve en annexe du livre de Mahler [**Mah 1**]. On trouve une démonstration très courte (et très dense) de la transcendance de e et π et du théorème de Lindemann-Weierstrass dans le livre de Baker [**Bak 8**].

Revenons aux approximations des fonctions exponentielles données par Hermite. Elles constituent ce qu'on appelle des "approximants de Padé", en raison d'un mémoire de H. Padé paru en 1892 "sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles". Comme Mahler l'a montré plus tard (en 1931), le mémoire d'Hermite de 1893 permettait aussi de démontrer la transcendance de e, en suivant la démarche des démonstrations actuelles de transcendance. Ultérieurement, Mahler a déduit par ces techniques des résultats totalement explicites et très remarquables (*cf.* [**Mah 2**]) comme $|e^n - m| \geq n^{-33n}$ (pour tout entier n assez grand et m entier quelconque) et $|\pi - p/q| > q^{-45}$ (pour q assez grand), ainsi que des mesures d'approximation diophantienne simultanée des logarithmes de nombres premiers... Cet exposant 45 fut abaissé par Mahler à 42, puis à 21 par Wirsing et à 20 par Mignotte.

Les approximants de Padé restent d'actualité, comme en témoignent des travaux récents de G. Choodnovsky (*cf.* par exemple, [**Ch 5**]).

A un nombre réel irrationnel x associons la borne inférieure $t(x)$ des réels t pour lesquels l'inéquation $|x - p/q| \leq q^{-t}$ possède une infinité de solutions rationnelles. La théorie des fractions continues montre que l'on a toujours $t(x) \geq 2$, l'égalité ayant lieu pour les irrationnels quadratiques. Dans le cas où x est algébrique, le théorème de Liouville implique $t(x) \leq d$, où d désigne le degré de x. Lorsque x est au moins de degré 3, Thue a amélioré cette inégalité en $t(x) \leq (d/2) + 1$. D'autres progrès suivront avec Siegel (1921, $t(x) \leq 2d^{1/2}$), Dyson et Gelfond (1947, $t(x) \leq (2d)^{1/2}$) puis enfin Roth (1955, $t(x) = 2$). On trouvera une démonstration du théorème de Thue au prochain paragraphe.

Il peut paraître paradoxal de choisir la démonstration de ce résultat d'approximation diophantienne comme prototype de démonstration de transcendance, mais il s'agit d'une démonstration simple et qui met en jeu (pour la première fois dans l'histoire) un lemme sur la résolution des équations linéaires homogènes en nombres entiers — basé sur le fameux "principe des tiroirs" — et qui s'est avéré extrêmement fécond. Grâce à ce lemme, on démontre l'existence d'un polynôme non nul $A(X,Y)$ à coefficients entiers, et qui possède en un point convenable un zéro d'ordre élevé. Il est important de remarquer qu'une construction totalement explicite — comme celle d'Hermite — de ce polynôme n'est pas nécessaire, il suffit d'obtenir des bornes raisonnables pour son degré et la valeur absolue de ses coefficients. Le principe des tiroirs (Schubfachschluss, box principle, pigeon-hole principle — les tiroirs étant remplacés par des nids de pigeon) avait déjà été utilisé par Minkowski et Dirichlet. Avec Siegel, il deviendra un outil fondamental de la transcendance. Et il est notable qu'aujourd'hui — en dépit de la simplicité de l'argument de base (une application d'un ensemble fini dans un autre possédant moins