AUTOUR DES SCHÉMAS EN GROUPES

École d'été « Schémas en groupes »

Group Schemes
A celebration of SGA3

Volume II

Baptiste Calmès, Pierre-Henri Chaudouard
Brian Conrad, Cyril Demarche, Jean Fasel

edited by
Bas Edixhoven, Philippe Gille
Gopal Prasad, Patrick Polo

Panoramas et Synthèses

Numéro 46

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Diffusion

Maison de la SMF	AMS	EDP Sciences
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248	17, avenue du Hoggar
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940	91944 Les Ulis Cedex A
France	USA	France
`smf@smf.univ-mrs.fr`	`www.ams.org`	`www.edpsciences.com`

Tarifs

Vente au numéro : 56 € ($ 84)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Panoramas et Synthèses
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`revues@smf.ens.fr` • `http://smf.emath.fr/`

ISSN 1272-3835

ISBN 978-2-85629-819-0

Directeur de la publication : Marc Peigné

PANORAMAS ET SYNTHÈSES 46

AUTOUR DES SCHÉMAS EN GROUPES

École d'été « Schémas en groupes »

Group Schemes
A celebration of SGA3

Volume II

Baptiste Calmès, Pierre-Henri Chaudouard,
Brian Conrad, Cyril Demarche, Jean Fasel

edited by
Bas Edixhoven, Philippe Gille, Gopal Prasad, Patrick Polo

Société mathématique de France 2015
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Baptiste Calmès
Université d'Artois, Laboratoire de Mathématiques de Lens, France
E-mail : `baptiste.calmes@univ-artois.fr`

Pierre-Henri Chaudouard
Université Paris 7 - Denis Diderot, Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche, UMR 7586, Bâtiment Sophie Germain, Case 7012, 75205 Paris Cedex 13, France
E-mail : `chaudouard@math.jussieu.fr`

Brian Conrad
Math Dept., Stanford University, Stanford, CA 94305, USA
E-mail : `conrad@math.stanford.edu`

Cyril Demarche
Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, UMR 7586, CNRS, Univ. Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, 75005 Paris, France
E-mail : `cyril.demarche@imj-prg.fr`

Jean Fasel
Ludwig Maximilian Universität, Munich
E-mail : `jean.fasel@gmail.com`

2000 ***Mathematics Subject Classification.*** — 11F70, 11F72, 11R39, 14D20, 14L15, 14L30, 18F20, 20G07, 20G10, 20J06, 22E55.

Mots-clé et phrases. — Algèbre à division, algèbre centrale simple, cohomologie non abélienne, cohomologie perverse, fibration de Hitchin, forme quadratique, gerbes, groupe classique, groupe linéaire, groupe orthogonal, lemme fondamental de Langlands-Shelstad, lemme fondamental pondéré d'Arthur, programme de Langlands, schémas en groupes, torseurs.

AUTOUR DES SCHÉMAS EN GROUPES

École d'été « Schémas en groupes »

Group Schemes
A celebration of SGA3

Volume II

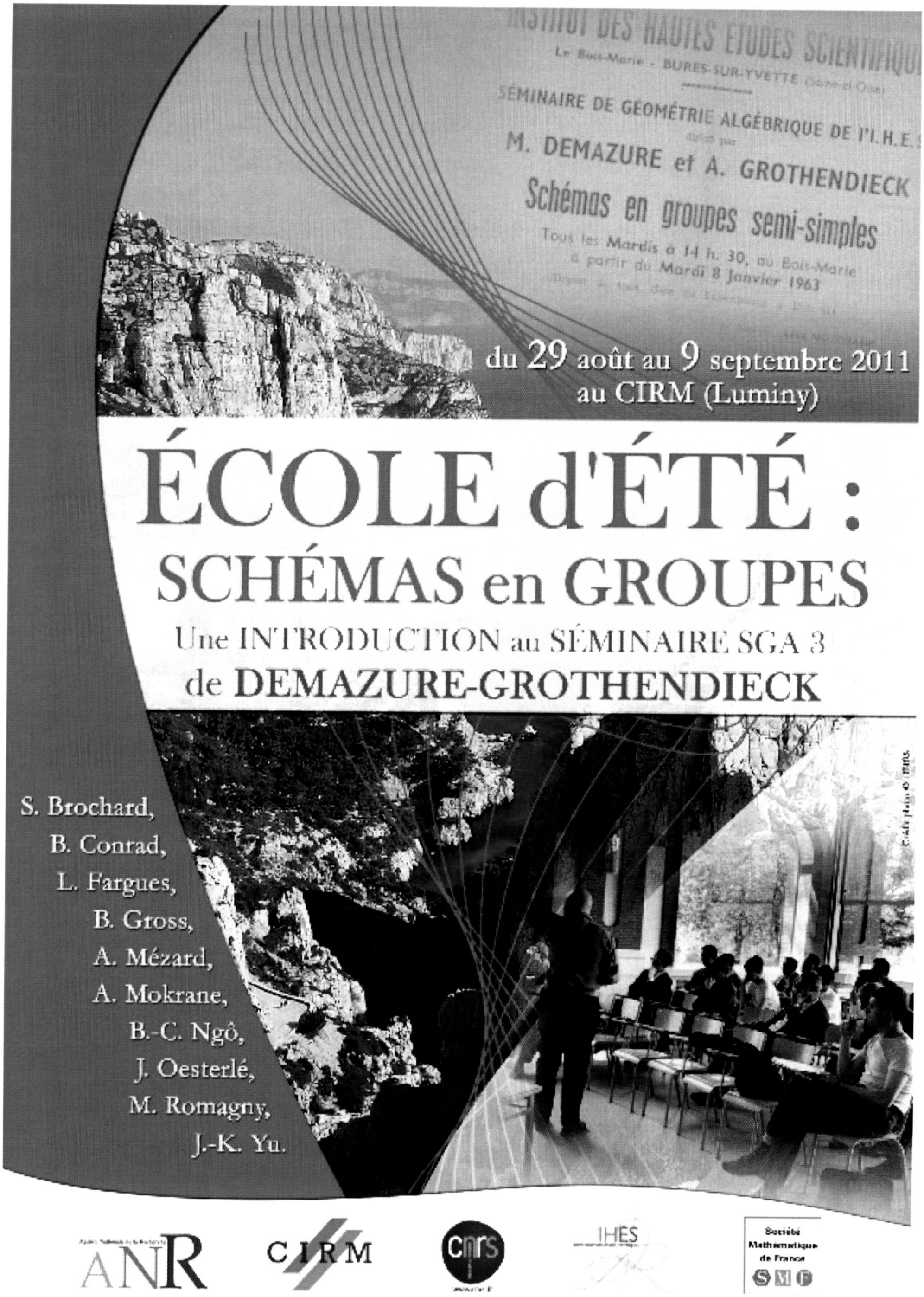
B. Calmès, P.-H. Chaudouard, B. Conrad, C. Demarche, J. Fasel

Abstract. — This volume contains the second part of the proceedings of the *Summer school "Group Schemes, introduction to the* SGA3 *seminar of Demazure-Grothendieck"*, which was held at the Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM) at Luminy in September 2011. This summer school was devoted to the theory of group schemes and especially of reductive group schemes.

This second part mainly consists of expanded versions of talks given, some of which contain new results on group schemes.

Résumé. — Ce volume contient la seconde partie des actes de l'*École d'été « Schémas en groupes, une introduction au séminaire* SGA3 *de Demazure-Grothendieck »*, qui s'est tenue au Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM) à Luminy en septembre 2011. Cette école était consacrée à la théorie des schémas en groupes en particulier réductifs.

Ce second volume est constitué principalement de versions développées d'exposés oraux, dont certains présentent des résultats originaux sur les schémas en groupes.



Réalisation graphique : Julien Fournigault.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Nous introduisons les groupes algébriques linéaires dits « classiques » sur une base quelconque, puis nous les replaçons dans la classification des groupes réductifs établie dans SGA3. Nous traitons les cas non déployés, et décrivons au passage plusieurs catégories de torseurs.

Cet article est une introduction à la fibration de Hitchin pour un groupe reductif général et sa variante tronquée. Cette fibration est au cœur des démonstrations du lemme fondamental par Ngô et du lemme fondamental pondéré par Laumon et l'auteur. Nous expliquons le principal résultat cohomologique qui est la clef de notre démonstration. En guise d'illustration, nous esquissons la démonstration d'une relation entre les cohomologies des fibrations de Hitchin pour le groupe $Sp(2n)$ et son groupe dual $SO(2n+1)$.

Nous expliquons la théorie de structure de Tits des groupes algébriques unipotents connexes et lisses sur un corps général de caractéristique positive (en particulier imparfait). Ceci s'appuie sur les travaux antérieurs de Rosenlicht [1963] concernant la structure des groupes unipotents lisses et connexes ainsi que des actions de tores sur ces groupes au-dessus d'un corps de base de caractéristique positive. Nous l'utilisons pour établir un théorème de structure plus général pour les k–groupes affines résolubles lisses et connexes qui remplace (et généralise) la structure de produit semi-direct dans le cas d'un corps parfait k.

Nous étudions le phénomène suivant : certains **Q**-groupes G semi-simples connexes *non déployés* admettent comme modèles des **Z**-groupes $\mathscr{G}$ affines et plats avec "partout bonne réduction" (c'est à dire, $\mathscr{G}_{\mathbf{F}_p}$ est un $\mathbf{F}_p$-groupe semi-simple pour chaque premier p). En outre, considérant de tels $\mathscr{G}$ à **Z**-groupe isomorphisme près, il y a au plus un tel $\mathscr{G}$ pour un G donné. Ceci est vu classiquement pour les types B et D en utilisant des réseaux quadratiques définis positifs.

L'étude de ces **Z**-groupes donne lieu à des applications concrètes d'aspects multiples, de la théorie des groupes réductifs sur des anneaux (schémas de sous-groupes de Borel, schémas d'automorphismes, cohomologie relative non abélienne, etc.), et met en évidence le rôle de la théorie des nombres (théorie du corps de classes, formules de masse, approximation forte, comptage de points sur les corps finis, etc.) dans l'analyse des possibilités. En partie, ceci est un article d'exposition sur [Gross, 1996].

Un théorème classique dû à Mostow assure que sur un corps de caractéristique nulle, toute extension d'un groupe algébrique réductif par un groupe algébrique unipotent est scindée, et que deux sections de cette extension sont conjuguées sur le corps de base. Suivant des idées de Giraud et Breen, on introduit dans ce texte des ensembles de cohomologie non abélienne qui classifient les extensions d'un schéma en groupes par un autre, ainsi que les sections de telles extensions. On utilise ensuite ces ensembles de cohomologie pour obtenir des versions du résultat de Mostow sur des schémas de base plus généraux que des corps de caractéristique nulle.

ABSTRACTS

Classical groups

We introduce so-called "classical" linear algebraic groups over a general base, and we then place them where they belong in the classification of reductive groups established in SGA3. We cover the non split cases, and we describe on the way several categories of torsors.

Cohomology of the truncated Hitchin fibration

This paper is an introduction to the (truncated) Hitchin fibration for a general reductive group. This fibration is the central object in the proofs of the fundamental lemma (by Ngô) and the weighted fundamental lemma (by Laumon and the author). We give also some explanations about the main cohomological result that is the key of our proofs. As an illustration of our methods, we sketch the proof of a relation between the cohomologies of Hitchin fibrations attached to the group $Sp(2n)$ and its dual group $SO(2n+1)$.

The structure of solvable groups over general fields

We explain Tits' structure theory for smooth connected unipotent groups over general fields of positive characteristic (especially imperfect fields). This builds on earlier work of Rosenlicht [1963] and concerns the structure of smooth connected unipotent groups as well as torus actions on such groups over an arbitrary ground field of positive characteristic. We use it to establish a general structure theorem for solvable smooth connected affine k-groups that replaces (and generalizes) the semi-direct product structure over perfect k.

We study the following phenomenon: some *non-split* connected semisimple $\mathbf{Q}$-groups G admit flat affine $\mathbf{Z}$-group models $\mathscr{G}$ with "everywhere good reduction" (i.e., $\mathscr{G}_{\mathbf{F}_p}$ is a connected semisimple $\mathbf{F}_p$-group for every prime p). Moreover, considering such $\mathscr{G}$ up to $\mathbf{Z}$-group isomorphism, there can be more than one such $\mathscr{G}$ for a given G. This is seen classically for types B and D by using positive-definite quadratic lattices.

The study of such $\mathbf{Z}$-groups provides concrete applications of many facets of the theory of reductive groups over rings (scheme of Borel subgroups, automorphism scheme, relative non-abelian cohomology, etc.), and it highlights the role of number theory (class field theory, mass formulas, strong approximation, point-counting over finite fields, etc.) in analyzing the possibilities. In part, this is an expository account of [Gross, 1996].

A classical result by Mostow states that over a field of characteristic zero, any extension of a reductive algebraic group by a unipotent algebraic group splits, and that any two sections of this extension are conjugate over the ground field. Following ideas of Giraud and Breen, we introduce in this text some non-abelian cohomology sets that classify both extensions of a given group scheme by another one, and sections of such extensions. We use those cohomology sets to get new versions of Mostow's result over base schemes that are more general than fields of characteristic zero.

AVANT-PROPOS

Ce volume contient la seconde partie des actes de l'*École d'été « Schémas en groupes, une introduction au séminaire SGA3 de Demazure-Grothendieck »*, que nous avons organisée en septembre 2011 au Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM, UMS 822 du CNRS) à Luminy.

Cette école a été financée par le CIRM (labex Carmen), l'Agence Nationale de la Recherche (projet PEPR : Points Entiers et Points Rationnels), le CNRS (formation permanente), l'IMJ-PRG (Institut Mathématique de Jussieu-Paris Rive Gauche), ses équipes de recherche Analyse algébrique et Géométrie et topologie algébriques, l'IHES, et la fondation Compositio Mathematica.

Nous adressons nos vifs remerciements à Julien Fournigault, assistant de communication à l'École normale supérieure, pour la réalisation de l'affiche de l'école d'été reproduite en page iv.

Paris, janvier 2015,

B. Edixhoven, P. Gille, P. Polo et G. Prasad

FOREWORD

The *Luminy's Summer School on Group Schemes* was devoted to the SGA3 seminar edited by Demazure-Grothendieck. It was held in the Centre International de Rencontres Mathématiques of Luminy (CIRM) from August 29 to September 9 of 2011 and was supported by the CIRM (Labex Carmin), the Agence Nationale de la Recherche (ANR, project PEPR), the Centre National de Recherches Scientifiques (CNRS, continuing training), the Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES, Bures-sur-Yvette), the Institut Mathématique de Jussieu-Paris Rive Gauche (IMJ-PRG) and its two research groups Analyse algébrique and Géométrie et topologie algébriques, and the Foundation Compositio Mathematica.

The main purpose of the Summer school was to revisit the Demazure-Grothendieck seminar after almost fifty years and it coincided with the publication of corrected and annotated editions of the first and the third volumes of SGA3 in the series "Documents Mathématiques" of the Société Mathématique de France. The first volume of the proceedings provides expanded notes of three lecture series. The contributions to this second volume come in three flavors. The following two provide expanded notes of two more lecture series :

Brian Conrad : *Non split groups over* $\mathbb{Z}$,

Brian Conrad : *The structure of solvable groups over general fields.*

The next two contributions provide examples and applications of SGA3, by globalizing known results from the field case or by refining certain results.

Baptiste Calmès and Jean Fasel : *Classical group schemes,*

Cyril Demarche : *Non-abelian Hochschild cohomology and extensions of group schemes.*

Finally the paper :

Pierre-Henri Chaudouard : *Cohomology of the truncated Hitchin fibration*

is a survey on recent advances in geometric Langland's theory (namely the fundamental lemma) focusing on group schemes techniques.

We thank the following institutions for their important financial contribution to the Summer School (we give in parentheses the names of the directors at that time) : CIRM (UMS 822 du CNRS, Patrick Foulon), foundation Compositio Mathematica