

**336**

**ASTÉRISQUE**

**2011**

NEUMANN AND DIRICHLET HEAT KERNELS  
IN INNER UNIFORM DOMAINS

Pavel Gyrya & Laurent Saloff-Coste

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

---

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France.

Numéro 336, 2011

---

*Comité de rédaction*

Guy DAVID	Fabrice PLANCHON
Olivier DEBARRE	Raphaël ROUQUIER
Damien GABORIAU	Wolfgang SOERGER
Patrice LE CALVEZ	Wendelin WERNER
Robert Alain OLIVER	
Yves ANDRÉ (dir.)	

*Diffusion*

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	www.ams.org

*Tarifs*

*Vente au numéro* : 30 € (\$45)

*Abonnement* Europe : 463 €, hors Europe : 512 € (\$768)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat : Nathalie Christiaën*

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2011

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-306-5

Directeur de la publication : Aline BONAMI

---

**336**

**ASTÉRISQUE**

**2011**

NEUMANN AND DIRICHLET HEAT KERNELS  
IN INNER UNIFORM DOMAINS

Pavel Gyrya & Laurent Saloff-Coste

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

*Pavel Gyrya*

Department of Mathematics, Cornell University, Ithaca, New York 14853  
pavel.gyrya@cornell.edu

*Laurent Saloff-Coste*

Department of Mathematics, Cornell University, Ithaca, New York 14853  
lsc@math.cornell.edu

**Classification mathématique par sujet (2000).** — 31C256, 35K20, 58J35, 60J60; 31C12 58J65, 60J45.

**Mots-clefs.** — Noyau de chaleur, condition aux limites de Dirichlet, domaines intérieurs uniformes, espaces de Dirichlet, inégalités de Harnack.

# NEUMANN AND DIRICHLET HEAT KERNELS IN INNER UNIFORM DOMAINS

Pavel Gyrya, Laurent Saloff-Coste

*Abstract.* — This monograph focuses on the heat equation with either the Neumann or the Dirichlet boundary condition in unbounded domains in Euclidean space, Riemannian manifolds, and in the more general context of certain regular local Dirichlet spaces. In works by A. Grigor'yan, L. Saloff-Coste and K-T. Sturm, the equivalence between

- the parabolic Harnack inequality,
- the two-sided Gaussian heat kernel estimate,
- the Poincaré inequality and the volume doubling property,

is established in a very general context. We use this result to provide precise two-sided heat kernel estimates in a large class of domains described in terms of their inner intrinsic metric and called inner (or intrinsically) uniform domains. Perhaps surprisingly, we treat both the Neumann boundary condition and the Dirichlet boundary condition using essentially the same approach albeit with the additional help of a Doob's  $h$ -transform in the case of Dirichlet boundary condition.

The main results are new even when applied to Euclidean domains with smooth boundary where they capture the global effect of the condition of inner uniformity as, for instance, in the case of domains that are the complement of a convex set in Euclidean space.

**Résumé (Le noyau de la chaleur avec condition de Neumann ou de Dirichlet dans les domaines intérieurement uniformes).** — Ce texte traite de l'étude du noyau de la chaleur avec condition de Neumann ou condition de Dirichlet au bord dans les domaines euclidiens non-bornés, mais aussi les domaines non-bornés dans les variétés riemanniennes et, plus généralement, les domaines non-bornés de certain espaces de Dirichlet réguliers locaux.

Les travaux de A. Grigor'yan, L. Saloff-Coste et K-T. Sturm, ont montré l'équivalence, dans un large contexte, des propriétés suivantes:

- l'inégalité de Harnack parabolique,
- les estimations gaussiennes du noyau de la chaleur,

— l'inégalité de Poincaré et la propriété de doublement du volume.

Nous utilisons ce résultat pour obtenir des estimations précises du noyau de la chaleur pour une large classe de domaines définis en termes de leur distance intrinsèque et appelés domaines intérieurement (ou intrinséquement) uniformes. De façon peut être surprenante, nous traitons le problème avec la condition de Neumann au bord et celui avec la condition de Dirichlet au bord par la même approche, mais avec l'aide supplémentaire d'une transformation de Doob dans le cas de la condition de Dirichlet.

Les résultats principaux que nous obtenons sont nouveaux même dans le cas des domaines euclidiens à bord régulier où ils capturent l'effet de la condition d'uniformité intérieure comme, par exemple, dans le cas des domaines qui sont le complément d'un convexe fermé de  $\mathbb{R}^n$ .

# CONTENTS

<b>1. Introduction</b> .....	1
1.1. Goals: informal description .....	1
1.2. Smooth unbounded Euclidean domains .....	3
Neumann boundary condition .....	3
Dirichlet boundary condition .....	4
1.3. Inner uniform domains .....	6
1.4. Remarks on the Doob $h$ -transform technique .....	11
1.5. Harnack-type Dirichlet spaces .....	11
1.6. Inner uniform domains in Harnack-type Dirichlet spaces .....	13
1.7. Mixed boundary conditions .....	14
<b>2. Harnack-type Dirichlet spaces</b> .....	17
2.1. Model spaces .....	17
2.1.1. The $n$ -dimensional Euclidean space .....	17
2.1.2. Uniformly elliptic divergence form operators .....	19
2.1.3. Riemannian manifolds .....	20
2.1.4. Sub-Riemannian geometry .....	20
2.1.5. Polytopal complexes .....	22
2.2. Local regular Dirichlet spaces .....	23
2.2.1. Regular Dirichlet forms .....	23
2.2.2. Energy and carré du champ .....	24
2.2.3. The intrinsic distance associated with a Dirichlet form .....	26
2.2.4. The doubling property .....	28
2.2.5. The Poincaré inequality .....	29
2.2.6. Lipschitz functions .....	30
2.2.7. The heat semigroup .....	31
2.2.8. Local weak solutions of the Laplace and heat equation .....	31
2.2.9. Local weak solutions of the Laplace equation .....	32
2.2.10. Local weak solutions of the heat equation .....	32
2.3. Harnack-type Dirichlet spaces .....	34
2.3.1. Parabolic Harnack inequality .....	34
2.3.2. Doubling, Poincaré, and Harnack inequality .....	36
2.3.3. The associated Hunt process and harmonic sheaf .....	38
2.4. Boundary conditions .....	39

2.4.1. The Dirichlet-type heat semigroup in $U$ .....	39
2.4.2. Weak solutions with Dirichlet boundary condition along $\partial U$ ...	42
2.4.3. The Neumann-type heat semigroup in $U$ .....	45
2.4.4. Weak solutions with Neumann boundary condition along $\partial U$ ...	46
<b>3. The Neumann heat kernel in inner uniform domains</b> .....	<b>49</b>
3.1. Inner uniform domains .....	49
3.1.1. Uniform domains .....	49
3.1.2. Inner uniform domains .....	53
3.1.3. Basic examples and related notions .....	55
3.2. The Neumann-type Dirichlet form in inner uniform domains .....	55
3.3. The Poincaré inequality in inner uniform domains .....	56
3.3.1. Statements of the main inequalities .....	57
3.3.2. Whitney covering .....	58
3.3.3. The trace of $\mathfrak{R}$ on a fixed ball $B$ in $\widetilde{U}$ .....	60
3.3.4. Decomposition using Whitney balls .....	61
3.3.5. Poincaré inequality with a different measure .....	66
3.4. Applications to Neumann-type Dirichlet forms .....	67
3.4.1. Regularity of Neumann-type Dirichlet forms .....	67
3.4.2. Proof of the heat kernel estimates for the Neumann-type semigroups .....	71
<b>4. The harmonic profile of an unbounded inner uniform domain</b> ..	<b>73</b>
4.1. The harmonic profile .....	73
4.2. The elliptic boundary Harnack principle in uniform domains .....	74
4.2.1. Boundary Harnack principle .....	74
4.2.2. The boundary Harnack principle for the Green functions $G_{\xi,R}^U$ ..	76
4.2.3. Basic Green functions estimates .....	77
4.2.4. The work of Aikawa .....	80
4.2.5. Green functions and capacity width .....	80
4.3. Existence of a harmonic profile .....	89
4.3.1. A profile candidate .....	89
4.3.2. For uniform domains, the candidate $h$ is indeed a profile .....	90
4.3.3. The doubling property of the profile .....	91
4.4. From uniform domains to inner uniform domains .....	93
<b>5. The Dirichlet heat kernel in inner uniform domains</b> .....	<b>95</b>
5.1. The $h$ -transform technique .....	95
5.1.1. Dirichlet-type Dirichlet forms .....	95
5.1.2. The $h$ -transform technique .....	96
5.2. The $h^2$ -weighted Dirichlet form .....	99
5.2.1. Regularity on $\widetilde{U}$ .....	99
5.2.2. The $h$ -transform on inner uniform domains .....	100
5.3. The Dirichlet-type Dirichlet form on an inner uniform domain .....	101



5.3.1. The Dirichlet heat kernel .....	101
5.3.2. The parabolic boundary Harnack principle .....	104
<b>6. Examples</b> .....	107
6.1. Limits in $\mathcal{F}^0(U)$ .....	107
6.2. From classical solutions to weak solutions in Euclidean domains ....	108
6.3. The domain above the graph of a function .....	112
6.4. The complement of a convex set .....	117
6.4.1. The complement of a convex set is inner uniform .....	118
6.4.2. Exterior of a star-shaped domain. ....	120
6.5. Miscellaneous examples .....	126
6.5.1. The Von Koch snowflake .....	126
6.5.2. Cones .....	129
6.5.3. The Fibonacci spiral .....	130
6.6. Examples in sub-Riemannian geometry .....	131
6.6.1. The canonical sub-Riemannian geometry of the Heisenberg group	131
6.7. Examples in the context of Euclidean complexes .....	134
<b>Bibliography</b> .....	137

