

**455**

**ASTÉRISQUE**

**2025**

DECOMPOSITION OF THE DIAGONAL,  
INTERMEDIATE JACOBIANS,  
AND UNIVERSAL CODIMENSION-2 CYCLES  
IN POSITIVE CHARACTERISTIC

J. D. Achter, S. Casalaina-Martin & C. Vial

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

---

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 455, 2025

---

*Comité de rédaction*

Marie-Claude ARNAUD      Alexandru OANCEA  
Christophe BREUIL      Nicolas RESSAYRE  
Eleonore DI NEZZA      Rémi RHODES  
Colin GUILLARMOU      Sylvia SERFATY  
Alessandra IOZZI      Sug WOO SHIN  
Eric MOULINES  
Antoine CHAMBERT-LOIR (dir.)

*Diffusion*

Maison de la SMF      AMS  
Case 916 - Luminy      P.O. Box 6248  
13288 Marseille Cedex 9      Providence RI 02940  
France      USA  
commandes@smf.emath.fr      <http://www.ams.org>

*Tarifs*

*Vente au numéro* : 46 € (\$ 69)  
*Abonnement* Europe : 818 €, hors Europe : 889 € (\$ 1 333)  
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat*

Astérisque  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Fax: (33) 01 40 46 90 96  
asterisque@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2025

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN: 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)  
ISBN 978-2-37905-200-2  
doi:10.24033/ast.1244

Directeur de la publication : Isabelle Gallagher

---

**455**

**ASTÉRISQUE**

**2025**

DECOMPOSITION OF THE DIAGONAL,  
INTERMEDIATE JACOBIANS,  
AND UNIVERSAL CODIMENSION-2 CYCLES  
IN POSITIVE CHARACTERISTIC

J. D. Achter, S. Casalaina-Martin & C. Vial

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

*Jeffrey D. Achter*

Colorado State University, Department of Mathematics, Fort Collins, CO 80523, USA  
j.achter@colostate.edu

*Sebastian Casalaina-Martin*

University of Colorado, Department of Mathematics, Boulder, CO 80309, USA  
casa@math.colorado.edu

*Charles Vial*

Universität Bielefeld, Germany  
vial@math.uni-bielefeld.de

Soumis le 15 juillet 2020, accepté le 6 décembre 2023.

---

**Mathematical Subject Classification** (2010). – 14C25, 14E08, 14F20, 14G17, 14K30, 14J30, 14M20.

**Keywords.** – Stable rationality, decomposition of the diagonal, intermediate Jacobians, algebraic representatives, universal cycle, positive characteristic.

**Mots-clefs.** – Rationalité stable, décomposition de la diagonale, jacobiniennes intermédiaires, représentants algébriques, cycle universel, caractéristique positive.

*To Lev and Naomi;  
to Elijah and Jacob; and  
to Joseph, Antonin and Margaux*



**DECOMPOSITION OF THE DIAGONAL,  
INTERMEDIATE JACOBIANS,  
AND UNIVERSAL CODIMENSION-2 CYCLES  
IN POSITIVE CHARACTERISTIC**

by

J. D. Achter, S. Casalaina-Martin & C. Vial

*Abstract.* – We consider the connections among algebraic cycles, Abelian varieties, and stable rationality of smooth projective varieties in positive characteristic. Recently Voisin constructed two new obstructions to stable rationality for rationally connected complex projective threefolds by giving necessary and sufficient conditions for the existence of a cohomological decomposition of the diagonal. In this paper, we show how to extend these obstructions to rationally chain connected threefolds in positive characteristic via  $\ell$ -adic cohomological decomposition of the diagonal. This requires extending results in Hodge theory regarding intermediate Jacobians and Abel-Jacobi maps to the setting of algebraic representatives. For instance, we show that the algebraic representative for codimension-two cycle classes on a geometrically stably rational threefold admits a canonical auto-duality, which in characteristic zero agrees with the principal polarization on the intermediate Jacobian coming from Hodge theory. As an application, we extend a result of Voisin, and show that in characteristic greater than two, a desingularization of a very general quartic double solid with seven nodes does not admit a universal codimension-two cycle class. In the process, we establish some results on the moduli space of nodal degree-four polarized K3 surfaces in positive characteristic.

*Résumé.* (Décomposition de la diagonale, jacobiniennes intermédiaires, et cycles universels de codimension 2 en caractéristique positive). – Nous examinons les relations entre cycles algébriques, variétés abéliennes, et la propriété de rationalité stable pour les variétés projectives et lisses en caractéristique positive. Récemment, Voisin a exhibé deux nouvelles obstructions à la rationalité stable pour les solides projectifs complexes rationnellement connexes en donnant des conditions nécessaires et suffisantes à l'existence d'une décomposition cohomologique de la diagonale. Dans cet article, nous montrons comment étendre ces obstructions aux solides projectifs rationnellement connexes par chaîne en caractéristique positive en utilisant la cohomologie  $\ell$ -adique.