Bulletin de la S. M. F.

Olivier Debarre

Théorèmes de Lefschetz pour les lieux de dégénérescence

Bulletin de la S. M. F., tome 128, n° 2 (2000), p. 283-308

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_2000__128_2_283_0>

Bull. Soc. math. France,
128, 2000, p. 283–308.

THÉORÈMES DE LEFSCHETZ POUR LES LIEUX DE DÉGÉNÉRESCENCE

PAR OLIVIER DEBARRE (*)

RÉSUMÉ. — On étend dans cet article les théorèmes de Lefschetz classiques au cas des lieux de dégénérescence d'un morphisme de fibrés vectoriels sur une variété projective complexe. Sous certaines hypothèses numériques et géométriques, on calcule une partie de la cohomologie des sous-variétés définies en majorant le rang d'un morphisme de fibrés vectoriels vérifiant une condition de positivité convenable. On étudie aussi le cas d'un morphisme antisymétrique, et on obtient un théorème de type Bertini pour les lieux de dégénérescence orthogonaux, qui entraîne que les lieux de Brill-Noether d'une variété de Prym sont connexes quand leur dimension attendue est strictement positive.

ABSTRACT. — LEFSCHETZ' THEOREMS FOR DEGENERACY LOCI. — This paper is concerned with extending the classical Lefschetz theorems to the setting of degeneracy loci of a map of bundles on a complex projective variety. Under favorable numerical and geometrical hypotheses, one can compute parts of the cohomology of subvarieties defined by bounding the rank of a map of vector bundles satisfying a suitable positivity condition. The case of an antisymmetric map is also studied, and a Bertini type theorem is obtained for orthogonal degeneracy loci. It implies that the Brill-Noether loci in a Prym variety are connected whenever their expected dimension is positive.

Soient X une variété complexe projective *lisse* connexe et Y le lieu des zéros d'une section d'un fibré en droites ample sur X. Le théorème de Lefschetz énonce que la restriction $H^p(X,\mathbb{Z}) \to H^p(Y,\mathbb{Z})$ est bijective pour $p < \dim X - 1$, injective pour $p = \dim X - 1$. Cela entraîne le théorème de Bertini : Y est connexe si sa dimension est au moins 1. Dans le même ordre d'idées, Grothendieck a montré que les groupes de Picard de X et de Y sont isomorphes (quelles que soient les singularités de Y !) si $\dim Y \geq 3$.

Étant donnés des fibrés vectoriels E et F sur X de rangs respectifs e et f, et

(*) Texte reçu le 19 avril 1999, accepté le 17 décembre 1999.
O. DEBARRE, IRMA, Université Louis Pasteur, CNRS, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex. Email : debarre@math.u-strasbg.fr et http ://irmasrv1.u-strasbg.fr/~debarre/
Classification mathématique par matières : 14F05, 14F25, 14F45, 14H40, 14J05, 14M15.

Mots clés : théorème de Lefschetz, théorème de Bertini, fibrés vectoriels amples, lieux de dégénérescence, variétés de Prym, lieux de Brill-Noether, grassmanniennes isotropes.

un morphisme $u : E \to F$, on considère les lieux de dégénérescence

$$D_r = \{x \in X \mid \mathrm{rg}(u_x) \leq r\},$$

munis de leur structure réduite. Fulton et Lazarsfeld ont démontré dans [FL] l'analogue du théorème de Bertini : si $\mathrm{Hom}(E, F)$ est ample, D_r est connexe si sa dimension attendue $\delta(r) = \dim(X) - (e-r)(f-r)$ est au moins 1. Nous poursuivons leurs méthodes pour obtenir des extensions des théorèmes de Lefschetz et Grothendieck mentionnés plus haut. Il y a plusieurs cas de figure :

• si D_{r-1} est vide, on peut complètement décrire (*cf.* (1.1)) la cohomologie entière de D_r jusqu'en degré $\delta(r)-1$. Si D_r est normal, et que l'on a les inégalités $0 < r < \min\{e, f\}$ et $\delta(r) \geq 3$, le groupe de Picard de D_r est isomorphe à $\mathrm{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}$.

• Si au contraire suffisament des lieux D_s, pour $s \leq r$, sont non vides, la restriction $H^p(X, \mathbb{Z}) \to H^p(D_r, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour p assez petit (*cf.* th. 2.2 pour un énoncé précis). Par exemple, si D_r est normal, que D_{r-1} n'est pas vide ou que $r = 0$, et que $\delta(r) \geq 3$, les groupes de Picard de X et de D_r sont isomorphes (cor. 3.4).

Dans [E], Ein montre ces résultats sur le groupe de Picard dans le cas où E est trivial, en supposant seulement $\delta(r) = 2$ mais aussi F « suffisamment ample » et u général (c'est une extension du théorème de Noether-Lefschetz sur le groupe de Picard d'une surface générale dans $\mathbb{P}^3$). López [Lo], puis Ellingsrud et Peskine [EP], étudient le cas des surfaces générales de $\mathbb{P}^4$ projectivement de Cohen-Macaulay (qui sont des lieux de dégénérescence avec $r = e-1 = f-2$). D'autre part, pour $r = \min\{e, f\} - 1$ et D_{r-1} vide, toujours sous les hypothèses F « suffisamment ample » et u général, Spandaw détermine dans sa thèse les classes *algébriques* de $H^{\delta(r)}(D_r, \mathbb{Z})$ (voir aussi [S]).

Nous nous intéressons ensuite au cas d'un morphisme $u : E \to E^* \otimes L$ *anti-symétrique.* Tu a démontré que si $\wedge^2 E^* \otimes L$ est ample, le lieu de dégénérescence

$$A_r = \{x \in X \mid \mathrm{rg}(u_x) \leq 2r\}$$

est connexe si sa dimension attendue $\alpha(r) = \dim(X) - \binom{e-2r}{2}$ est au moins 1. Nous obtenons des extensions des théorèmes de Grothendieck et Lefschetz dans ce cadre : la restriction $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(A_r)$ est bijective si A_r est normale et $\alpha(r) \geq 3$, et

• si A_{r-1} est vide, on peut décrire (th. 4.1) la cohomologie entière de A_r jusqu'en degré $\alpha(r) - 1$;

• si au contraire suffisament des lieux A_s, pour $s \leq r$, sont non vides (*cf.* th. 5.1 pour un énoncé précis), la restriction $H^p(X, \mathbb{Z}) \to H^p(A_r, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour p assez petit.

Nous terminons par l'étude du cas des fibrés *orthogonaux* (dont le cas des morphismes antisymétriques est un cas particulier) : on se donne un fibré vectoriel V de rang pair sur X muni d'une forme quadratique non dégénérée à valeurs dans un fibré en droites L et des sous-fibrés E et F totalement isotropes maximaux de V. On montre un théorème de Bertini pour les lieux de dégénérescence

$$O^r = \{x \in X \mid \dim(E_x \cap F_x) \geq r \text{ et } \dim(E_x \cap F_x) \equiv r \pmod 2\} :$$

si $E^* \otimes F^* \otimes L$ est ample, O^r est connexe si sa dimension attendue $\dim(X) - \binom{r}{2}$ est au moins 1. Cela entraîne en particulier que les lieux de Brill-Noether d'une variété de Prym P (définis dans [W]) sont connexes dès que leur dimension attendue est strictement positive, et irréductibles lorsque P est générale.

Il est probable que les résultats de type Lefschetz obtenus dans le cas antisymétrique subsistent dans ce cas, mais je ne sais pas le démontrer (*cf.* (6.3)).

Dans cet article, tous les schémas sont de type fini sur le corps des nombres complexes. On désigne par $\mathbb{F}$ un corps fini ou égal à $\mathbb{Q}$.

Je remercie R. Laterveer et W. Fulton de leurs conseils, ainsi que P. Pragacz pour sa lecture attentive d'une première version de cet article et ses remarques pertinentes.

I. Lieux de dégénérescence

1. Le résultat de Fulton et Lazarsfeld.

Soient X une variété complexe projective irréductible et E et F des fibrés vectoriels sur X de rangs respectifs e et f. Soit $u : E \to F$ un morphisme; on considère

$$D_r = \{x \in X \mid \mathrm{rg}(u_x) \leq r\}_{\mathrm{red}} ,$$

on note ι_r l'inclusion $D_r \hookrightarrow X$ et on pose

$$\delta(r) = \dim(X) - (e - r)(f - r).$$

Par la suite, nous supposerons toujours $e \leq f$ (ce que l'on peut toujours faire quitte à remplacer u par son dual).

(1.1). — Soient $\pi : G = G(e - r, E) \to X$ le fibré en grassmanniennes et S le fibré tautologique de rang $e - r$ sur G. Soit Y le lieu des zéros de la composée

$$S \hookrightarrow \pi^* E \xrightarrow{\pi^* u} \pi^* F.$$

Le morphisme π induit par restriction un morphisme $\pi' : Y \to D_r$ propre surjectif, birationnel au-dessus de $D_r - D_{r-1}$, de fibre $G(e-r, e-\ell)$ au-dessus de $D_\ell - D_{\ell-1}$. Fulton et Lazarsfeld montrent que *si* $\mathrm{Hom}(E,F)$ *est ample*, $H^q(G-Y,\mathbb{F})$ s'annule pour $q \geq \dim(X)+(f+r)(e-r)$. Par dualité de Lefschetz, on en déduit, si X est lisse, $H^p(G,Y;\mathbb{F}) = 0$ pour $p \leq \delta(r)$.

La dualité de Lefschetz n'est valable que lorsque $G - Y$ est lisse. Elle est remplacée dans le cas général par une suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p\big(G - Y, \mathcal{H}_{-q}(G,\mathbb{F})\big) \Longrightarrow H_{-p-q}(G,Y;\mathbb{F}),$$

où $\mathcal{H}_q(G,\mathbb{F})$ est le faisceau de fibre $H_q(G, G-\{x\};\mathbb{F})$ en un point x de G (voir [H1, p. 548]). Lorsque $G - Y$ est localement intersection complète, le support de $\mathcal{H}_{\dim(G)+i}(G,\mathbb{F})$ est de dimension au plus i, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ (voir [H1, lemma 4, p. 550]). Or la démonstration de Fulton et Lazarsfeld montre que pour tout fermé Z de X, la dimension cohomologique de $\pi^{-1}(Z) - Y$ est au plus $\dim(\pi^{-1}(Z)) + f(e-r) - 1$. On en déduit(1)

$$E_2^{pq} = 0 \quad \text{pour} \quad p > -q - \dim(G) + f(e-r) - 1,$$

d'où de nouveau

$$H_p(G,Y;\mathbb{F}) = 0 \quad \text{pour} \quad p \leq \dim(G) - f(e-r) = \delta(r), \tag{1.2}$$

sous l'hypothèse que $X - D_0$ *est localement intersection complète*(2).

(1.3). — Supposons D_{r-1} vide et notons c l'inverse dans $H^\bullet(D_r,\mathbb{Z})$ de la classe de Chern totale du fibré vectoriel $\mathrm{Ker}(u_{|D_r})$. La discussion ci-dessus entraîne que la cohomologie de D_r est, en degré $< p$, celle du fibré en grassmanniennes G. Comme cette dernière est calculée par exemple dans [F1, prop. 14.6.5], on en déduit que l'application

$$\begin{aligned} \bigoplus_{\substack{\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_{e-r})\\ r\geq\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_{e-r}\geq 0}} H^{p-2|\lambda|}(X,\mathbb{F}) &\longrightarrow H^p(D_r,\mathbb{F}) \\ \sum_\lambda \alpha_\lambda &\longmapsto \sum_\lambda \Delta_\lambda(c)\cdot \iota_r^*\alpha_\lambda \end{aligned}$$

(1) Les faisceaux $\mathcal{H}_q$ ne sont localement constants que sur chaque strate d'une stratification de Whitney de G, et il faut en fait raisonner strate par strate comme dans [H2, Lemma 3, p. 134].

(2) On a une autre suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(G,Y;\mathcal{H}_{-q}(G,\mathbb{F})) \Longrightarrow H_{-p-q}(G-Y,\mathbb{F}),$$

qui permet de montrer que l'on a une inclusion $H^1(G,Y;\mathbb{Q}) \hookrightarrow H_{2\dim(G)-1}(G-Y,\mathbb{Q})$ sous la seule hypothèse que G est normale (voir [FL, lemma 1.3]). Il en résulte que D_r est connexe dès que $\delta(r) > 0$, sans hypothèse sur les singularités de X.