DÉFORMATION, QUANTIFICATION, THÉORIE DE LIE

Alberto Cattaneo, Bernhard Keller,
Charles Torossian, Alain Bruguières

Panoramas et Synthèses

Numéro 20 2005

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique et du Ministère de la culture et de la communication (aide de la délégation générale à la langue française)

PANORAMAS ET SYNTHÈSES 20

DÉFORMATION, QUANTIFICATION, THÉORIE DE LIE

Alberto Cattaneo
Bernhard Keller
Charles Torossian
Alain Bruguières

Société Mathématique de France 2005
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique
et du Ministère de la Culture et de la Communication

A. Cattaneo
Institut für Mathematik, Universität Zürich – Irchel, Winterthurerstrasse 190, CH-8057 Zürich, Suisse.
E-mail : `alberto.cattaneo@math.unizh.ch`
Url : `http://www.math.unizh.ch/asc`

B. Keller
UFR de mathématiques, UMR 7586 du CNRS, Université Paris 7 – Denis Diderot, Case 7012, 2 place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France.
E-mail : `keller@math.jussieu.fr`
Url : `http://www.math.jussieu.fr/~keller`

C. Torossian
UMR 8553 du CNRS, DMA-ENS, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris cedex 05, France.
E-mail : `Charles.Torossian@ens.fr`
Url : `http://www.dma.ens.fr/~torossia`

A. Bruguières
Département de mathématiques, Université Montpellier II, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 05, France.
E-mail : `bruguier@math.univ-montp2.fr`
Url : `http://gauss.math.univ-montp2.fr/~bruguieres`

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** Primaire : 53D55 ; Secondaires : 16E40, 53D17, 81S10, 22E45.

***Mots clefs*. —** Théorie des déformations, quantification par déformation, physique mathématique, variété de Poisson, cohomologie de Hochschild, algèbre de Lie, isomorphisme de Duflo, formule de Campbell-Baker-Hausdorff, théorie des cordes, espace de configurations.

DÉFORMATION, QUANTIFICATION, THÉORIE DE LIE

Alberto Cattaneo, Bernhard Keller, Charles Torossian, Alain Bruguières

Résumé. — En 1997, M. Kontsévich démontra que toute variété de Poisson admet une quantification formelle, canonique à équivalence près, résolvant ainsi un problème ancien de physique mathématique. Par sa démonstration, et l'interprétation qu'il fit d'une démonstration ultérieure due à Tamarkin, M. Kontsévich a ouvert des voies de recherche nouvelles en théorie de Lie, groupes quantiques, théorie des déformations, théorie des opérades… et révélé des liens fascinants entre ces sujets et la théorie des nombres, la théorie des nœuds et la théorie des motifs. Ce travail sur la quantification par déformation va continuer à influencer ces domaines dans les années à venir. Dans les trois parties de ce volume, nous allons 1) présenter les résultats principaux de la prépublication de 1997 de Kontsévich et esquisser son interprétation de l'approche de Tamarkin, 2) montrer la pertinence du théorème de Kontsévich pour la théorie de Lie et 3) expliquer l'idée provenant de la théorie des cordes topologiques qui a inspiré l'approche de Kontsévich. Un appendice est consacré à la géométrie des espaces de configurations.

***Abstract* (Deformation, Quantization, Lie theory).** — In 1997, M. Kontsevich proved that every Poisson manifold admits a formal quantization, canonical up to equivalence. In doing so he solved a longstanding problem in mathematical physics. Through his proof and his interpretation of a later proof given by Tamarkin, he also opened up new research avenues in Lie theory, quantum group theory, deformation theory and the study of operads… and uncovered fascinating links of these topics with number theory, knot theory and the theory of motives. Without doubt, his work on deformation quantization will continue to influence these fields for many years to come. In the three parts of this volume, we will 1) present the main results of Kontsevich's 1997 preprint and sketch his interpretation of Tamarkin's approach, 2) show the relevance of Kontsevich's theorem for Lie theory and 3) explain the idea from topological string theory which inspired Kontsevich's proof. An appendix is devoted to the geometry of configuration spaces.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

En 1997, M. Kontsévich démontre que toute variété de Poisson admet une quantification formelle, canonique à équivalence près, résolvant ainsi un problème ancien de physique mathématique.

Cette démonstration eut un effet catalyseur pour un vaste champ de recherches mathématiques (théorie de Lie, groupes quantiques, déformations, opérades, liens avec la théorie des nombres, la théorie des nœuds et les motifs).

Le texte présenté dans ce volume ne requiert aucune connaissance en physique et est constitué de trois parties, consacrées chacune à un aspect du résultat de Kontsévich, ainsi que d'un appendice détaillant la géométrie des espaces de configurations.

– Partie I : présentation des résultats principaux de la prépublication de 1997 de Kontsévich et esquisse de l'approche de Tamarkin,

– Partie II : illustration de la pertinence du théorème de Kontsévich pour la théorie de Lie,

– Partie III : description des idées provenant de la théorie des cordes topologiques qui a inspiré l'approche de Kontsévich.

1.1. Mécanique hamiltonienne, variétés symplectiques et variétés de Poisson

En des termes très vagues, le problème résolu par Kontsévich consiste en un passage de structures commutatives à des structures non commutatives, où les premières ont leurs origines historiques en mécanique hamiltonienne et les dernières en mécanique quantique. Dans cette section, nous décrivons brièvement les structures commutatives pertinentes. Elles sont associées à des systèmes hamiltoniens classiques.

Une *variété symplectique* est une variété lisse (c'est-à-dire C^∞) M munie d'une 2-forme fermée non dégénérée ω. Un exemple typique est la variété tangente $M = TL$

d'une variété L munie de la 2-forme donnée par

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i,$$

où les q_i forment un système de coordonnées locales autour d'un point de L et les p_i désignent la base duale de la base formée des dérivées partielles par rapport aux q_i. Si M est une variété symplectique quelconque, on associe à chaque fonction régulière (id. $\mathcal{C}^\infty$) f sur M son *champ de vecteurs hamiltonien* X_f en demandant que l'on ait

$$df = \iota(X_f)\omega.$$

Dans le langage hamiltonien, un système physique est alors donné par l'algèbre des fonctions régulières sur la variété symplectique M et par une fonction régulière H appelé le *hamiltonien* du système. Les points de M représentent les *états* du système. Les fonctions régulières sur M sont alors les *observables* (comme la position, le moment...). Si O est une observable, son évolution dans le temps est déterminée par les *équations de Hamilton*

$$\frac{d}{dt}O(t) = X_H(O).$$

En écrivant

$$\{f, g\} = X_f(g),$$

pour des fonctions régulières f et g, nous pouvons récrire ces équations ainsi :

$$\frac{d}{dt}O(t) = \{H, O\}.$$

L'opération bilinéaire

$$(f, g) \longmapsto \{f, g\}, \ \ f \text{ et } g \in C^\infty(M),$$

est alors antisymétrique. Du fait que ω est fermée, cette opération vérifie l'identité de Jacobi, à savoir

$$\{f, \{g, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}.$$

Ainsi, le crochet $\{\ ,\ \}$ devient un *crochet de Poisson*, c'est-à-dire qu'il est un crochet de Lie et que pour toute fonction régulière f, l'application $g \mapsto \{f, g\}$ vérifie la règle de Leibniz

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}, \ \ g, h \in C^\infty(M).$$

Les équations de Hamilton ne dépendent que du crochet de Poisson et non pas de la 2-forme symplectique ω. Il est donc naturel d'agrandir la classe des variétés considérées en y incluant, en plus des variétés symplectiques, les *variétés de Poisson*, c'est-à-dire les variétés lisses munies d'un crochet de Poisson. Voici deux autres raisons pour cette plus grande généralité : les variétés de Poisson apparaissent naturellement comme des quotients de variétés symplectiques par des groupes de symétries et comme des limites classiques de groupes quantiques. Toute variété symplectique est de dimension paire. Les variétés de Poisson peuvent avoir des dimensions quelconques. Ce fait est illustré par les exemples importants suivants : soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie et M son espace dual sur le corps des réels. Alors l'espace des fonctions linéaires sur M est une algèbre de Lie (isomorphe à $\mathfrak{g}$) et M devient une variété de Poisson pour l'unique crochet de Poisson qui étend le crochet de Lie sur l'espace des fonctions linéaires (voir les sections 2.1.3 et 5.1). Bien sûr, cette variété M n'est pas symplectique en général. Néanmoins, elle est réunion de variétés symplectiques. À savoir, si G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors toute orbite de l'action coadjointe de G sur M porte une structure symplectique induite par la structure de Poisson sur M.

1.2. De la mécanique hamiltonienne à la mécanique quantique

Comme on vient de le voir, en mécanique hamiltonienne, les systèmes physiques sont décrits par des algèbres commutatives, à savoir des algèbres de fonctions régulières sur des variétés de Poisson. En mécanique quantique, à l'opposé, les systèmes physiques sont décrits par des algèbres non commutatives, à savoir des algèbres d'opérateurs (ce sont les observables) sur des espaces de Hilbert, dont les rayons représentent les états du système. La description quantique fournit toujours des prédictions plus précises de résultats d'expériences physiques. Néanmoins pour des systèmes à une échelle macroscopique, la description classique reste une très bonne approximation de la description quantique. On obtient une mesure quantitative pour la qualité de l'approximation en exprimant la constante de Planck dans un système d'unités caractéristiques de l'échelle du système : plus la constante de Planck apparaît petite, plus la description classique s'approchera de la description quantique. En des termes imprécis, on dit souvent que la mécanique classique est la limite de la mécanique quantique quand la constante de Planck tend vers zéro.

Ainsi, au moins du point de vue philosophique, le passage de la description quantique à la description classique est immédiat. L'opération inverse, qui consiste donc à produire une description quantique à partir de la description classique, est naturellement beaucoup moins évidente. Deux approches ont été prédominantes :

(1) la quantification géométrique,
(2) la quantification par déformation.

La quantification géométrique vise à construire explicitement un espace de Hilbert muni de l'action d'une algèbre d'opérateurs. Elle s'appuie fortement sur les symétries d'un espace de phases donné. En fait, dans sa forme principale, elle s'applique aux espaces de phases qui sont des orbites coadjointes d'un groupe de Lie. Son avatar purement mathématique est la méthode des orbites en théorie des représentations des groupes de Lie. Dans ce domaine, la quantification géométrique a connu de nombreux succès. D'un autre côté, la quantification géométrique n'a pas élucidé la théorie des champs quantique et on n'a pas réussi à l'appliquer à la relativité générale pour obtenir une théorie adéquate de la gravité quantique. Le problème vient du fait que la quantification géométrique ne permet que la quantification d'un nombre assez petit d'observables classiques.

La quantification par déformation part de la même donnée que la quantification géométrique, à savoir une variété symplectique ou, plus généralement, une variété de Poisson. À l'opposé, le résultat de la quantification par déformation est une algèbre associative non commutative dont les éléments sont considérés comme les observables quantiques. Cette algèbre n'est pas donnée comme une algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert mais comme une déformation formelle à un paramètre de l'algèbre des fonctions régulières sur la variété de Poisson donnée. Par définition, la donnée d'une telle déformation est celle d'une suite d'applications bilinéaires

$$(f,g) \longmapsto B_n(f,g), \quad f \text{ et } g \text{ régulières},$$

telle que $B_0(f,g) = fg$ et telle que la multiplication

$$f * g = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(f,g)t^n$$

s'étende en une multiplication *associative* sur l'espace $C^\infty(M)[[t^n]]$ des séries formelles en t. La déformation formelle $*$ est un *star-produit* si en outre tous les B_n sont des opérateurs bidifférentiels (c'est-à-dire qu'ils sont donnés localement par des produits de fonctions régulières par des dérivées partielles itérées des deux arguments). Une *quantification formelle* ou *quantification par déformation* d'une variété de Poisson donnée M est alors un star-produit tel que, quand t tend vers zéro, le crochet de l'algèbre de Lie sous-jacente à l'algèbre associative déformée tend vers le crochet de Poisson des fonctions. Concrètement, cette dernière condition signifie que l'on a

$$B_1(f,g) - B_1(g,f) = \{f,g\}.$$

L'associativité de $*$ se traduit par les égalités

$$\sum_{j+k=n} B_j(f, B_k(g,h)) = \sum_{j+k=n} B_j(B_k(f,g),h)$$

pour tout $n \geqslant 0$. Dans un star-produit, on peut imaginer le paramètre de déformation t comme proportionnel à la constante de Planck de façon que le comportement du star-produit quand t tend vers zéro reflète l'idée que la description classique est la limite, quand la constante de Planck tend vers zéro, de la description quantique.

1.3. Quantification par déformation avant Kontsévich

La quantification par déformation fut d'abord proposée en 1978 dans l'article pionnier [**11**] par Bayen, Flato, Frønsdal, Lichnerowicz et Sternheimer. Dans cet article, les auteurs développent les fondements théoriques de la déformation par quantification et donnent les premières applications significatives. Se posent alors les questions fondamentales de l'existence et de l'unicité de la déformation par quantification d'une variété de Poisson donnée. En cherchant à résoudre le problème de l'existence, on se retrouve confronté à deux sous-problèmes :

– le problème dit « local » consistant à construire un star-produit pour un crochet de Poisson défini sur un voisinage de l'origine dans un espace vectoriel de dimension finie,

– le problème dit de « globalisation » consistant à recoller des star-produits donnés sur les ouverts d'un recouvrement de la variété.

Seul le cas des variétés symplectiques avait été traité avant la prépublication de 1997 de Kontsévich. Nous rappelons brièvement les résultats qui avaient été obtenus et nous renvoyons le lecteur à [**28**], [**110**] et [**39**] pour des comptes rendus plus détaillés concernant l'historique du sujet.

Dans le cas des variétés symplectiques, le problème local a une solution classique : en fait, grâce au théorème de Darboux, toute variété symplectique est localement isomorphe à la variété tangente $M_0 = T\mathbb{R}^n$ munie de sa structure symplectique canonique. La variété M_0 admet le *star-produit de Moyal-Weyl* (voir les sections 2.1.2 et 11.3). Ce produit provient de la composition des opérateurs sur $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ via l'identification, décrite par Weyl dans [**111**], de tels opérateurs avec des fonctions sur $\mathbb{R}^{2n}$. Il a été utilisé par Moyal [**83**] pour étudier des problèmes de mécanique statistique quantique du point de vue de l'espace classique des phases. Ainsi, pour montrer l'existence de star-produits sur des variétés symplectiques, il reste à montrer que l'on peut recoller des produits de Moyal-Weyl locaux bien choisis. Les premiers à obtenir ce résultat furent M. De Wilde and P. Lecomte dans leur article [**23**] paru en 1983. De manière indépendante, B.V. Fedosov donne une démonstration géométrique du même théorème dans [**34**], voir également [**35**], [**110**] et [**36**]. La démonstration de Fedosov a ouvert de nombreuses voies de recherche, voir [**28**].

Quant au problème de l'unicité d'un star-produit sur une variété symplectique, la solution finale fut obtenue par Nest et Tsygan dans [**84**], sur la base des travaux de Fedosov. Leur résultat combiné avec la classification par Moser des structures symplectiques proches par leurs classes de cohomologie [**82**] implique que pour les variétés symplectiques, on dispose d'une bijection entre les classes d'équivalence de star-produits et les classes d'équivalence de déformations formelles du crochet de Poisson donné.

1.4. Quantification par déformation d'après Kontsévich

Dans sa prépublication [**64**] de 1997, Kontsévich

(1) construit un star-produit explicite pour tout crochet de Poisson défini sur un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie,

(2) montre comment construire un star-produit défini globalement sur une variété de Poisson quelconque,

(3) démontre que pour une variété lisse quelconque, il y a bijection entre les classes d'équivalence de déformations formelles du crochet de Poisson nul et les classes d'équivalence de star-produits.

Ces théorèmes généralisent ceux qui avaient été obtenus auparavant mais l'approche de Kontsévich se fonde sur de nouvelles bases, entièrement différentes de celles de ses prédécesseurs. Grâce à des idées classiques de la théorie des déformations formelles dues à Gerstenhaber [**42**], Schlessinger-Stasheff [**94**], Deligne [**49**]... Kontsévich déduit ses résultats d'un énoncé plus général : la validité de la 'conjecture de formalité', qu'il avait lui-même formulée en 1996 dans [**65**]. Le terme de « formalité » provient de la théorie de l'homotopie rationnelle et désigne le fait que la structure des groupes d'homotopie de certaines variétés est une « conséquence formelle » de celle de leurs groupes d'homologie, voir [**25**]. En des termes plus techniques, on dit qu'une algèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée munie d'une différentielle (=*dg-algèbre de Lie*) est *formelle* si elle est liée à son homologie, considérée comme une dg-algèbre de Lie avec la différentielle nulle, par une suite de quasi-isomorphismes, c'est-à-dire des morphismes de dg-algèbres de Lie qui induisent des isomorphismes en homologie. À toute dg-algèbre de Lie est associé un problème de déformation, à savoir celui de déformer la solution nulle de l'équation de Maurer-Cartan

$$d(x) + \frac{1}{2}[x, x] = 0, \quad x \in L^1.$$

On dit que ce problème est « contrôlé » par la dg-algèbre de Lie L. Tout quasi-isomorphisme de dg-algèbres de Lie fournit une équivalence des problèmes de déformation associés. Ainsi, si L est formelle, alors L et son homologie $H^*(L)$ contrôlent des problèmes de déformation équivalents. Le problème de déformer la multiplication commutative des fonctions sur une variété lisse M en un star-produit est contrôlé par la dg-algèbre de Lie que Kontsévich note $D_{\mathrm{poly}}(M)$, où D désigne les opérateurs (multi-)différentiels. Il s'avère que son homologie, désignée par $T_{\mathrm{poly}}(M)$, contrôle les déformations du crochet de Poisson nul sur M. La conjecture de formalité de [**65**] affirme que $D_{\mathrm{poly}}(M)$ est formelle. Ceci implique alors l'équivalence des problèmes de déformation du point (3) ci-dessus. À un niveau concret, la formalité d'une dg-algèbre de Lie L est reflétée par l'existence de ce qu'on appelle un L_∞-quasi-isomorphisme entre $H^*(L)$ et L. C'est la donnée d'une suite d'applications multilinéaires qui envoient les puissances tensorielles de $H^*(L)$ vers L et qui vérifient une suite de conditions de compatibilité très compliquées. Un tel L_∞-morphisme fournit une application explicite qui envoie toute solution du problème de déformation contrôlé par $H^*(L)$ sur une solution du problème contrôlé par L. Dans sa prépublication [**64**], Kontsévich construit un L_∞-quasi-isomorphisme explicite entre $T_{\mathrm{poly}}(M)$ et $D_{\mathrm{poly}}(M)$ dans le cas où M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Ceci donne une formule explicite pour un star-produit qui quantifie un crochet de Poisson donné sur $M \subset \mathbb{R}^n$. En particulier, cette formule s'applique au cas où M est le dual d'une algèbre de Lie de dimension finie. Kontsévich construit son L_∞-quasi-isomorphisme grâce à une famille de constantes universelles, les *poids* w_Γ, paramétrés par certains carquois (=graphes orientés) Γ. Le poids w_Γ est défini comme une intégrale sur un espace (qui dépend de Γ) de configurations de points du plan. Les conditions de compatibilité entre les composantes