

LA THÉORIE DES ENSEMBLES EN FRANCE AVANT LA CRISE DE 1905 : BAIRE, BOREL, LEBESGUE ... ET TOUS LES AUTRES

Hélène GISPERT (*)

RÉSUMÉ. — Cet article s'intéresse à la façon dont le milieu mathématique français s'est saisi, dans ses travaux, des nouveaux concepts et des nouvelles méthodes de la théorie des ensembles. Nous montrons que cette prise en compte s'inscrit dans un courant propre aux mathématiques françaises, la nouvelle théorie des fonctions, et que, loin d'être marginale, elle se situe dans l'activité classique du milieu. De ce fait, la théorie des ensembles mise en œuvre porte la marque de cette utilisation spécifique et se différencie sur des aspects importants de la version qu'en présente Cantor.

ABSTRACT. — SET THEORY IN FRANCE PRIOR TO THE CRISIS OF 1905: BAIRE, BOREL, LEBESGUE ... AND THE REST. This paper investigates the manner in which French mathematical circles took up, in their work, the novel concepts and methods of set theory. Such an appropriation, it is shown, was effected within the context of a current specific to French mathematics, the then-new theory of functions; and, far from being marginal, this process may be seen as integral to those circles' classic tradition. Hence, set theory as incorporated in practice bears the hallmarks of this particular purpose, and differs in important respects from the version presented by Cantor.

Du jour où la théorie des ensembles a cessé d'être métaphysique pour devenir pratique, les idées nouvelles introduites par cette théorie ont produit, en théorie des fonctions, une floraison magnifique de recherches et de résultats.

[Borel 1909, p. 324]

En 1883 paraît, en français, dans le deuxième tome des *Acta mathematica* une version revue et corrigée des mémoires que Cantor a publiés depuis le début de la décennie 1870¹. Partant d'une question classique

¹ Je ne donne ici que la référence globale des articles de Cantor parus en français dans les *Acta mathematica* [Cantor 1883]. On trouve une bibliographie complète des articles de Cantor en allemand et en français dans l'ouvrage que Dauben a consacré à Cantor [Dauben 1979]. A propos de la diffusion en France de la théorie des ensembles de points, il faut également signaler la traduction du livre de 1882 de P. Du Bois-Reymond parue en 1887 sous le titre *Théorie générale des fonctions*.

(*) Texte reçu le 26 mai 1994, révisé le 12 décembre 1994.

Hélène GISPERT, Mathématiques, Centre universitaire, 91405 Orsay CEDEX, France.

d'analyse, l'unicité de la représentation d'une fonction par des séries trigonométriques, Cantor développe sur une centaine de pages les notions et résultats qui sont à la base de sa théorie des ensembles. Celle-ci s'articule tout d'abord sur les notions relatives aux sous-ensembles infinis de points de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^n$; celles d'ensemble dérivé (ensemble des points d'accumulation d'un ensemble donné), d'ensembles dérivés de tous les ordres, d'ensemble parfait, d'ensemble dense, ainsi que celles, profondément originales, de puissance d'un ensemble, de nombres transfinis et d'ensembles bien ordonnés. S'émancipant alors des origines de ces différentes notions engendrées de façon très «concrète», Cantor présente ensuite les nombres transfinis — pilier de sa théorie des ensembles — comme une extension autonome et systématique des nombres naturels. Cette dernière démarche est approfondie dans ses publications des années 1895–1897, les *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* dans lesquels il développe la théorie des types d'ordres, étudiant les propriétés des nombres transfinis cardinaux et ordinaux².

Je m'intéresserai dans cet article à la façon dont le milieu mathématique français s'est saisi de ces nouveaux concepts et de ces nouvelles méthodes ainsi qu'aux questions originales que cela lui a posées. Les premières réactions hostiles des mathématiciens français chargés en 1883 de la traduction des mémoires de Cantor pour les *Acta mathematica* sont connues [Hermite *Lettres*]; le rôle et la nature du recours à la théorie des ensembles, à la fin du siècle, dans les travaux de Borel, Baire ou Lebesgue également ([Dugac 1976a, 1978], [Michel 1992])³. Ceux-ci traduisent en fait une évolution dans les mathématiques françaises qui dépasse le cercle de ces trois mathématiciens d'exception. Je voudrais montrer ici que la prise en compte de la théorie des ensembles s'inscrit dans un moment particulier des mathématiques françaises où de nouvelles recherches — concernant la théorie des fonctions — s'imposent et se développent de

² Ces travaux ont été traduits en français sous le titre *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis* [Cantor 1899].

³ Ces recherches, sur lesquelles je m'appuierai, analysent également le devenir, dans les développements ultérieurs de l'analyse, des outils et résultats nouveaux liés à la théorie des ensembles de Borel, Baire, et Lebesgue; il n'en sera pas question ici. Ajoutons à ces références le livre plus ancien, en langue russe, de Medvedev sur l'école française de théorie des fonctions et des ensembles à la fin du XIX^e et au début du XX^e siècle [Medvedev 1976].

façon significative. Loin d'être marginale, la théorie des ensembles devient à partir de la fin des années 1890 un outil nécessaire et privilégié de ces nouvelles recherches et s'insère ainsi dans l'activité mathématique classique du milieu français. La théorie qu'il adopte — principalement celle des sous-ensembles de points de la droite réelle et du transfini dénombrable — porte, de ce fait, les traces de son insertion dans les cadres de l'activité mathématique française et se différencie, en particulier sur la notion clef de transfini, de la version qu'en présente Cantor.

Mon enquête, menée délibérément au niveau des seules productions mathématiques des auteurs français entre 1875 et 1905, se place avant la grande crise des paradoxes de la théorie des ensembles focalisée sur l'axiome du choix de Zermelo⁴. De plus, de façon paradoxale, elle se situe pour l'essentiel en deçà des publications de Cantor des années 1895–1897, les mathématiciens français se référant pour l'essentiel aux articles des *Acta mathematica*.

Dans une première partie, je me propose d'identifier à l'aide des travaux de plusieurs mathématiciens, la nature des évolutions — tant des contenus que des contextes dans lesquels ils s'insèrent — qui mirent à l'ordre du jour dans les mathématiques françaises les études d'ensembles infinis de points et donc, nécessairement, le recours à la théorie des ensembles. Je m'attache ensuite, à titre d'exemple, à l'étude d'une entreprise majeure de ces nouvelles mathématiques des années autour de 1900, la *Collection des monographies sur la théorie des fonctions*. Les premiers volumes dus à Borel, Baire et Lebesgue font ainsi l'objet de la deuxième partie de cet article. Dans la troisième partie, je cherche à mettre en perspective cette étude de cas en élargissant mon analyse aux travaux et aux positions du milieu mathématique français.

⁴ Il ne sera donc pas question ici des débats, qui opposèrent les mathématiciens français entre eux, sur les fondements et l'objet de leur science à partir de 1905, dont un temps fort fut les fameuses «Cinq lettres sur la théorie des ensembles» de Baire, Borel, Hadamard et Lebesgue publiées dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* en 1905. Dans ces débats — pour l'analyse desquels je renvoie au début de la thèse de Jean Cavaillès *Méthode axiomatique et formalisme* [1937] et à la thèse de Cassinet et Guillemot [1983] — les mathématiciens présentèrent des positions souvent plus radicales que celles qu'ils avaient adoptées dans leurs travaux antérieurs auxquels il sera ici fait référence (cf. les différentes éditions des *Leçons sur la théorie des fonctions* de Borel ou des *Leçons sur l'intégration et la recherche des primitives* de Lebesgue auxquelles, par exemple, se réfère Cavaillès).

1. DARBOUX, JORDAN, BAIRE : REPÈRES D'UNE ÉVOLUTION DANS LES MATHÉMATIQUES FRANÇAISES

Dans les journaux mathématiques, en particulier le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* qui recense depuis la décennie 1870 les articles mathématiques parus dans les périodiques, l'intitulé «*théorie des ensembles*» apparaît en tant que tel dans la classification des tables des matières à partir de 1905; c'est une des rubriques du premier chapitre «*Généralités*» qui comprend aussi la philosophie, l'histoire et la pédagogie. L'autonomie de cette rubrique est l'aboutissement d'un processus intéressant. Les articles consacrés à la théorie des ensembles de points puis à la théorie des ensembles ont d'abord été répertoriés sous l'intitulé «*principes de la géométrie*» dans le chapitre consacré à la «*Géométrie pure, élémentaire et synthétique*». Dans les années 1890 ils sont intégrés au chapitre «*Généralités*», mais ils figurent dans un premier temps, sans intitulé propre, dans la rubrique «*philosophie*».

La production française répertoriée, d'une façon ou d'une autre, comme «*théorie des ensembles*» dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* peut être rapidement recensée. Les premiers articles sont de Hadamard [1897] et Tannery [1897], le premier étant une courte intervention au congrès international des mathématiciens de Zürich et le second un article sur l'infini mathématique écrit dans la *Revue générale des sciences* à propos de la thèse de Couturat. En une dizaine d'années, de 1897 à 1907, on peut relever dans les *Fortschritte* — outre les cinq lettres parues dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* — les références de seize articles. Sept sont des notes aux *Comptes rendus* ([Baire 1899b], [Borel 1903a, 1903b et 1905a], [Zoretti 1904 et 1906], [Fréchet 1905]), deux paraissent dans le *Bulletin de la SMF* ([Borel 1903a] et [Lebesgue 1907b]) et quatre dans des revues de philosophie ou de diffusion des sciences ([Tannery 1897], [Borel 1899a et 1900a], [Richard 1905]). Deux articles, de Borel [1905b] et de Lebesgue [1907a], sont publiés dans des revues étrangères.

Cette rapide énumération semble indiquer que le domaine «*théorie des ensembles*», qui n'apparaît qu'à la fin des années 1890, est un domaine très circonscrit, avec peu d'auteurs, davantage réservé à des considérations sur les mathématiques qu'à des résultats mathématiques. En fait, une telle vision est terriblement étroite et insuffisante en même temps que

très significative d'une conception de l'époque de la théorie des ensembles, philosophique et métamathématique, conception que signale et critique Painlevé dans la leçon d'ouverture des leçons de Stockholm sur les équations différentielles :

« Je crois nécessaire d'insister ici sur les relations qui existent entre la théorie des fonctions et les travaux de M. Cantor. Dans une suite de recherches arithmétiques d'une grande profondeur, M. Cantor avait indiqué une classification des ensembles infinis, presque aussitôt rectifiée sur certains détails et complétée de la manière la plus heureuse par M. Bendixson. Les travaux de M. Bendixson [1883] mettaient notamment en évidence l'existence (bien invraisemblable a priori) d'ensembles infinis, dont aucun point n'est isolé et qui pourtant ne forment pas une ligne. Ce genre de recherches était d'un esprit si nouveau qu'il fallait quelque audace pour les accueillir dans un journal de mathématiques, et bien des lecteurs estimèrent que c'était là de la Philosophie plus que de la Science. Mais les progrès même des mathématiques ne devaient pas tarder à démentir ce jugement » [1895, p. 200].

Painlevé poursuit en mentionnant des travaux majeurs dans le champ de la théorie des fonctions analytiques qui furent publiés dès 1884 dans les *Acta mathematica* et eurent recours à des résultats de la théorie des ensembles. Il cite tout d'abord les travaux de Poincaré sur les fonctions kleinéennes et fuchsiennes, — « classe de fonctions définie par les propriétés les plus naturelles et [...] offrant l'exemple des singularités les plus compliquées qu'on ait prévu a priori » —, puis ceux de Mittag-Leffler sur la classification des fonctions analytiques⁵. Dans le mémoire sur les groupes kleinéens, Poincaré utilise en effet pour l'étude des points singuliers de ses fonctions kleinéennes une notion de ligne — « si on peut appeler cela une ligne » écrit-il [1884, p. 285] — constituée d'un ensemble infini de points auquel on ajoute son premier dérivé, formant ainsi « eine perfecte

⁵ Le point de vue de cet article qui s'attache aux mathématiciens français me conduit à souligner ici avec insistance, dans la mesure où cela ne sera guère mentionné par la suite, l'importance du rôle de Mittag-Leffler et de ses *Acta mathematica* dans l'introduction de la théorie des ensembles en France (voir *infra* note 17). Il était notamment engagé dans les nouvelles recherches sur le prolongement des fonctions analytiques (voir, entre autres, [Mittag-Leffler 1884]) particulièrement cultivées par les mathématiciens français, dont Picard auquel Painlevé fait référence dans la suite de cette citation.