

Astérisque

H. RUBENTHALER

Les paires duales dans les algèbres de Lie réductives

Astérisque, tome 219 (1994)

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__219__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__219__1_0)

© Société mathématique de France, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

219

ASTÉRISQUE

1994

**LES PAIRES DUALES DANS LES
ALGÈBRES DE LIE RÉDUCTIVES**

H. RUBENTHALER

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. classification :

17B20, 17B25, 17B10

Table des matières

Introduction	3
1. Notations et généralités	7
1.1. Paires duales, sous-algèbres de Howe	
1.2. Sous-algèbres paraboliques	
2. Les espaces préhomogènes de type parabolique	11
Table 1 : Espaces préhomogènes irréductibles réguliers de type parabolique	
Table 2 : Espaces préhomogènes commutatifs	
3. Les sous-algèbres admissibles et C-admissibles	19
Table 3 : Sous-algèbres admissibles	
4. Paires duales associées aux sous-algèbres C-admissibles	27
Table 4 : Parties et sous-algèbres C-admissibles qui ne vérifient pas l'hypothèse (H_1)	
5. Principes de classification	35
6. Détermination des sous-algèbres admissibles qui sont des sous- algèbres de Howe. Etude de la S-irréductibilité	47
6.1. Convention	
6.2. Diagrammes en dualité	
6.3. Type A_n	
6.4. Type B_n	
6.6. Type C_n	
6.7. Type D_n	
6.8. Type E_6	
6.9. Type E_7	
6.10. Type E_8	
6.11. Type F_4	
6.12. Type G_2	
6.13. Table 5 : Tableau récapitulatif	

7. Les paires duales S-irréductibles dans les algèbres de Lie classiques.....	77
7.1. Les paires duales dans le cas A_n	
7.2. Deux résultats	
7.3. Description en termes d'algèbres unitaires des paires duales S-irréductibles des algèbres de Lie classiques	
8. Enoncé et démonstration du théorème principal	85
9. Le cas du produit tensoriel de deux formes symétriques en dimension paire : étude détaillée	89
10. Constructions de tours duales.....	93
10.1. Définitions	
10.2. Quelques remarques concernant la plus grande racine	
10.3. Un premier ensemble de tours duales	
10.4. Où l'on agrandit la première tour duale dans E_6	
10.5. Où l'on agrandit la première tour duale dans E_7	
10.6. Où l'on agrandit la première tour duale dans E_8	
11. Paires duales associées aux orbites des espaces préhomogènes commutatifs	113
Bibliographie	119

LES PAIRES DUALES DANS LES ALGÈBRES DE LIE REDUCTIVES

HUBERT RUBENTHALER

INTRODUCTION

Ne t'attarde pas à l'ornière des résultats.

René Char

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de lie réductive complexe, un couple $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ de sous-algèbres réductives dans $\mathfrak{g}$ est appelé paire duale si $\mathfrak{a}$ est le commutant de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$ et vice versa.

Soit G le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$. L'objet de cet article est de donner une classification des paires duales à conjugaison par G près (sous une certaine condition d'irréductibilité).

La notion de paire duale dans le groupe symplectique a été introduite par Roger Howe [H1] en liaison avec la correspondance ou conjecture qui porte son nom. Rappelons brièvement, et sans être trop précis, l'énoncé de cette conjecture. Soit $G = Sp(n, k)$ le groupe symplectique habituel sur un corps local k . Soient G_1 et G_2 deux sous-groupes réductifs de G qui forment une paire duale (i.e. dont l'un est le commutant de l'autre...). Soit ω la représentation métaplectique de G construite par Shale et Weil ; le spécialiste saura qu'il vaut mieux se placer sur un revêtement de G . Soit π_1 une représentation irréductible de G_1 qui apparaît dans ω , c'est à dire telle que $\text{Hom}_{G_1}(\omega, \pi_1) \neq 0$. La conjecture de Howe dit alors qu'il existe une unique représentation π_2 de G_2 telle que $\text{Hom}_{G_1 \times G_2}(\omega, \pi_1 \otimes \pi_2) \neq 0$ et la correspondance $\pi_1 \mapsto \pi_2$ s'appelle la correspondance de Howe.

Cette conjecture, qui a aussi son analogue dans le cadre global, a suscité de très nombreux et souvent difficiles travaux qu'il est impossible de citer ici (mentionnons l'article de Howe ([H2]) dans le cas réel et l'exposé de Waldspurger ([Wa]) sur la question au séminaire Bourbaki).

Howe donna la classification des paires duales de $Sp(n, k)$ dans [H1], sans

détailler les démonstrations. On pourra trouver une démonstration détaillée pour les groupes classiques dans [M-V-W].

L'intérêt d'une classification des paires duales dans le cadre des algèbres de Lie réductives trouve ces dernières années une motivation supplémentaire avec la construction *explicite* par Kazhdan et Savin ([K-S],[S]) d'une représentation ω qui devrait jouer le rôle de la représentation métaplectique pour tout groupe semi-simple. De ce fait il nous semble intéressant de donner cette classification ne serait ce que pour fournir de nombreux exemples. Les travaux récents de Rallis et Schiffmann ([Ra-Sch]) qui utilisent certaines de nos constructions et qui obtiennent des correspondances "géométriques" entre orbites co-adjointes nous confortent dans cette idée. Nous pensons d'autre part que, même dans le cas classique, notre construction donne une image nouvelle des paires duales.

Dans cette étude nous nous plaçons donc au niveau des algèbres de Lie. La classification dans les algèbres classiques était "connue", mais utilisait de manière essentielle le fait qu'une algèbre de Lie classique est une algèbre de forme, c'est à dire qu'elle laisse invariante une forme bilinéaire.

Dans les faits, les paires duales des algèbres classiques apparaissent surtout comme produits tensoriels (d'algèbres) de formes. Cette vision des choses ne se transpose évidemment pas aux cas exceptionnels. Il fallait donc trouver une manière de fabriquer des paires duales, qui se réduise essentiellement au produit tensoriel dans le cas classique.

Pour cela, nous introduisons la notion de sous-algèbre admissible que nous avons décrite dans [Ru4]. Grosso modo une sous-algèbre admissible d'une algèbre $\mathfrak{g}$ semi-simple est obtenue de la manière suivante. Soit $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$ la décomposition de Levi d'une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$. Soit $Z(\mathfrak{l})$ le centre de $\mathfrak{l}$ et k la dimension de $Z(\mathfrak{l})$. Soit $\overline{\mathcal{R}}$ l'ensemble des racines restreintes à $Z(\mathfrak{l})$. Une sous-algèbre $\tilde{\mathfrak{g}}$ admissible de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre semi-simple dont $Z(\mathfrak{l})$ est une sous-algèbre de Cartan et qui est engendrée par k $\mathfrak{sl}_2$ -triplets $(X_{-\gamma_i}, H_{\gamma_i}, X_{\gamma_i})$ où les éléments H_{γ_i} forment une base de $Z(\mathfrak{l})$, où les racines γ_i sont les racines simples définissant $\mathfrak{p}$ (la "barre" désigne la restriction à $Z(\mathfrak{l})$) et où $X_{\overline{\alpha}}$ est un vecteur propre de $Z(\mathfrak{l})$ pour la valeur propre $\overline{\alpha}$.

Alors, dans *beaucoup de cas*, le couple $(\tilde{\mathfrak{g}}, Z_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\tilde{\mathfrak{g}}))$, où $Z_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ désigne le centralisateur de $\tilde{\mathfrak{g}}$, est une paire duale dans $\mathfrak{g}$.

Cette construction est justifiée par le théorème principal de cet article qui dit que, sous une certaine hypothèse d'irréductibilité que nous appelons S-irréductibilité, toute paire duale est du type précédent (à deux exceptions près, parfaitement contrôlées).

Ce résultat, long à obtenir, ne surprend pas, vu que l'on démontre d'abord facilement, que si $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est une paire duale semi-simple alors les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des centres de sous-algèbres de Levi de $\mathfrak{g}$ (Th. 5.4.). D'autre part, dans les cas classiques, cette construction correspond assez fidèlement à la notion de produit tensoriel (§7).

La notion de S-irréductibilité évoquée précédemment est la suivante. Nous dirons qu'une paire duale $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ semi-simple est S-irréductible si la sous-algèbre $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ est une S-sous-algèbre au sens de Dynkin ([D]), c'est à dire qu'elle n'est incluse dans aucune sous-algèbre propre qui est invariante par l'action adjointe d'une sous-algèbre de Cartan. On montre que dans le cas de l'algèbre symplectique cette notion de S-irréductibilité, pour des paires semi-simples, coïncide exactement avec la notion d'irréductibilité donnée par Howe ([H1]). Les résultats de cet article ont été annoncés dans [Ru6].

Indiquons à présent le contenu des paragraphes.

Les paragraphes 1,2, et 3 fixent les notations et donnent la classification des sous-algèbres admissibles et C-admissibles (les algèbres C-admissibles étant des algèbres admissibles d'un type particulier).

Dans le paragraphe 4 nous montrons que toute sous-algèbre C-admissible fournit une paire duale. Les démonstrations et résultats du paragraphe 4 constituent la clé de voûte de notre construction. Très curieusement, on remarquera que ce sont les espaces préhomogènes commutatifs (ou encore si l'on préfère les espaces hermitiens symétriques) qui fournissent les objets élémentaires qui servent à construire la plupart des paires duales.

Dans les paragraphes 5 nous donnons de nombreux procédés généraux pour construire des paires duales. Nous y démontrons aussi que si $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est une paire duale semi-simple non S-irréductible, alors il existe une sous-algèbre régulière de rang maximal dans laquelle $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est S-irréductible.

Le paragraphe 6 est consacré à la détermination des sous-algèbres admissibles non C-admissibles, qui fournissent des paires duales. On y étudie aussi la S-irréductibilité des paires construites. La table 5 du paragraphe 6 résume alors tous les résultats obtenus.

Dans le paragraphe 7, nous donnons la classification des paires duales S-irréductibles dans les cas classiques. Dans ces cas tout était "connu", mais rien n'était vraiment écrit. Nous avons cru bon de donner des démonstrations détaillées, d'autant plus qu'il nous fallait travailler avec la S-irréductibilité et comparer à tout moment avec l'irréductibilité classique. Bien entendu, notre exposé dans ce paragraphe paraphrase souvent, dans le cadre des algèbres, l'exposé analogue dans le cadre des groupes de [M-V-W].

Le paragraphe 8 est consacré à l'énoncé et à la démonstration du théorème principal qui dit que "presque toute" paire duale S-irréductible provient d'une sous-algèbre admissible.

L'exception la plus marquante au théorème principal se produit dans le cas D_n . Nous en donnons dans le paragraphe 9 une étude détaillée.

La notion de tour duale que nous introduisons dans le paragraphe 10, n'est

qu'une évidente généralisation de la notion de "see-saw pair" introduite par Kudla ([Ku]). Nous indiquons des procédés systématiques pour construire (surtout dans les cas exceptionnels) des tours "très hautes".

Enfin, dans le paragraphe 11, nous donnons une construction qui associe des paires duales à toute orbite des espaces préhomogènes commutatifs. Dans le langage équivalent et sans doute plus connu des espaces hermitiens symétriques, nous associons une paire duale à toute $K_{\mathbb{C}}$ -orbite de $\mathfrak{p}^+$ (dans les notations traditionnelles).

Remerciements. Cet article doit beaucoup à l'enthousiasme manifesté par David Ginzburg, Stephen Rallis, Gérard Schiffmann et Robert Stanton lors d'un séjour stimulant que j'ai effectué à Ohio State University, Columbus, en juin 1991. Je les en remercie chaleureusement.

Sauf mention expresse du contraire toutes les algèbres de Lie considérées dans cet article sont complexes.

1. Notations et généralités.

1.1. Paires duales, sous-algèbres de Howe.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple et soit G le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$. Si E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{g}$, nous désignerons par $Z_E(F)$ le centralisateur de F dans E , c'est à dire :

$$Z_E(F) = \{X \in E, [X, Y] = 0 \ \forall Y \in F\}.$$

Pour toute sous-algèbre $\mathfrak{s}$ nous noterons $Z_{\mathfrak{s}}$ ou $Z(\mathfrak{s})$ le centre de $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{s}' = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ son algèbre dérivée.

Définition 1.1.1. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive. Un couple $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ de sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ est appelé paire duale si :*

- 1) *les sous-algèbres $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont réductives dans $\mathfrak{g}$.*
- 2) *le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{b}$ et vice-versa.*

Notons que la deuxième condition de la définition précédente dit simplement que les sous-algèbres $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont leur propre bicommutant.

Définition 1.1.2. — *Si une sous-algèbre $\mathfrak{a}$ réductive dans $\mathfrak{g}$ est un des membres d'une paire duale (i.e. est égale à son bicommutant), nous dirons que $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Howe de $\mathfrak{g}$ (en accord avec la notion de sous-groupe de Howe introduite dans [M-V-W]).*

Le but de cet article est de classifier les paires duales à conjugaison par G près.

1.2. Sous-algèbres paraboliques.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple sur $\mathbb{C}$. Choisissons une fois pour toute une sous algèbre de cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. On désigne par $\mathcal{R}$ le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Soit $\Psi = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une base de racines de $\mathcal{R}$; on désigne alors