

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

GUY HENNIART

La conjecture de Langlands locale pour $GL(3)$

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 11-12 (1983)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1983_2_11-12__1_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA CONJECTURE DE LANGLANDS LOCALE POUR $GL(3)$

Guy HENNIART

Résumé

Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien. Nous prouvons l'existence et l'unicité d'une application de l'ensemble $G^\circ(3)$ des classes d'équivalence de représentations continues irréductibles de degré 3 du groupe de Weil de F , dans l'ensemble $A^\circ(3)$ des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles supercuspidales de $GL(3,F)$, application qui conserve les facteurs ϵ et soit compatible à la torsion par les caractères de $F^\times$. Nous montrons que cette application est bijective.

Dans le cours de la démonstration, nous obtenons une construction explicite des éléments de $A^\circ(3)$ et utilisons une théorie du changement de base modéré pour ces éléments.

Abstract

Let F be a locally compact non archimedean field. We prove that there exists a unique map from the set $G^\circ(3)$ of equivalence classes of continuous irreducible degree 3 representations of the Weil group of F , into the set $A^\circ(3)$ of equivalence classes of admissible irreducible supercuspidal representations of $GL(3,F)$, a map which is to preserve ϵ -factors and be compatible with torsion by characters of $F^\times$. We prove that this map is a bijection.

Meanwhile we obtain an explicit construction for the elements of $A^\circ(3)$ and we use for them a tame base change theory.

Guy HENNIART, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, Bâtiment Mathématiques 425
E.R.A. 653, 91405 ORSAY-cédex FRANCE

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	5
2. Facteurs L et ϵ	12
3. Injectivité	28
4. Surjectivité	53
5. Représentations très cuspidales	76
6. Changement de base modéré	111
7. Comparaison	128
 <u>Appendices</u>	
1. Séries de Poincaré.....	146
2. Convergence d'intégrales	149
3. Calculs de germes	154
4. Représentations cuspidales non ramifiées	158
5. Le cas modéré	165
6. Facteurs L et ϵ de paires et changement de base quadratique	171
 <u>Bibliographie</u>	 181

1. Introduction.

1.1. Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien. On fixera dans toute la suite une clôture séparable algébrique $\bar{F}$ de F , un caractère additif non trivial ψ_F de F , la mesure de Haar $d_F x$ sur F autoduale pour ψ_F , et on notera q_F le nombre d'éléments du corps résiduel de F .

Notre but est de prouver une généralisation, conjecturée par R.P. Langlands, de la théorie locale du corps de classes. Rappelons que celle-ci [Se2, We] donne une bijection canonique entre les caractères continus du groupe de Galois de $\bar{F}$ sur F et les caractères d'ordre fini du groupe multiplicatif $F^\times$ de F . La généralisation consiste à relier, d'une part les représentations continues de degré donné n du groupe de Galois de $\bar{F}$ sur F , et d'autre part certaines représentations (de dimension finie ou infinie), dites admissibles, du groupe localement compact totalement discontinu $GL(n, F)$. Pour l'élégance des résultats, il faut remplacer le groupe de Galois de $\bar{F}$ sur F par une variante : le groupe de Weil-Deligne W_F^1 de $\bar{F}$ sur F . Le lien entre les deux types de représentations mentionnées ci-dessus se fait à l'aide d'invariants, les facteurs L et ϵ , qu'on leur attache. L'alinéa suivant précise la nature de ces invariants et le paragraphe 1.2 donne notre résultat.

En fait, à une représentation σ du groupe de Weil-Deligne W_F^1 [Ta], on sait associer le facteur $L(\sigma)$ qui, fonction d'un paramètre complexe s , est une fonction rationnelle de q_F^{-s} , et le facteur $\epsilon(\sigma, \psi_F, d_F x)$, que nous noterons en abrégé $\epsilon(\sigma)$ et qui, comme fonction du même paramètre s , est un monôme non nul en q_F^{-s} . Ces facteurs ne dépendent que de la classe d'équivalence de σ . De même, pour chaque entier $n \geq 1$, on sait associer à une classe d'équivalence π de représentations admissibles irréductibles de $GL(n, F)$ des facteurs $L(\pi)$ et $\epsilon(\pi, \psi_F, d_F x)$ (noté $\epsilon(\pi)$) ayant des propriétés analogues [GJ]. La théorie locale du corps de classes [Se1, We] nous permet d'identifier les classes d'équivalence de représentations de

degré 1 de W_F^1 et les classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles de $GL(1, F)$, i.e. les caractères (continus) de $F^\times$. On peut ainsi faire agir le groupe $\hat{F}^\times$ des caractères (continus) de $F^\times$, par torsion, sur les représentations de W_F^1 (on notera $\chi\sigma$ la représentation obtenue par torsion de σ par le caractère $\chi \in \hat{F}^\times$) et sur les représentations admissibles irréductibles de $GL(n, F)$ (notation : $\chi\pi$).

1.2. Le but de cet article est de prouver le théorème suivant, cas particulier de conjectures générales de Langlands.

Théorème. Soit $n = 3$.

1. Il existe une unique application $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ de l'ensemble des classes d'équivalence de représentations Φ -semisimples, de degré n , de W_F^1 , dans l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles de $GL(n, F)$, qui vérifie, pour tout caractère continu χ de $F^\times$

$$L(\chi\sigma) = L(\chi\pi(\sigma))$$

$$\varepsilon(\chi\sigma) = \varepsilon(\chi\pi(\sigma)) .$$

2. Cette application est une bijection, et fait se correspondre les représentations irréductibles (de degré n) de W_F^1 et les représentations admissibles irréductibles cuspidales de $GL(n, F)$.

3. Les conducteurs de σ et $\pi(\sigma)$ sont les mêmes, et le déterminant de σ correspond, par la théorie locale du corps de classes, au caractère central de $\pi(\sigma)$. Enfin, l'application $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ est compatible au passage aux représentations contragrédientes.

Remarque. L'énoncé analogue, pour $n = 1$, reformule la théorie locale du corps de classes; pour $n = 2$, il a été prouvé par Kutzko [Ku2], après des résultats

INTRODUCTION

partiels de plusieurs mathématiciens, cf. [Tu2, Ct2]. En fait les résultats des chapitres 5 et 7 de cet article peuvent être généralisés, et, quand n est la caractéristique résiduelle p de F , l'auteur a prouvé, début 1983, à l'aide de résultats de D. Kazhdan, les énoncés en ce cas des parties 1 à 3 du théorème précédent, sauf l'unicité de l'application $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$. Des résultats semblables quand n est un nombre premier distinct de p sont dus à A. Moy [Mo], le cas $n=p$ ayant aussi été traité par Ph. Kutzko et A. Moy.

1.3. Le chapitre 2 ne contient rien d'original; il a pour but de fixer les notations et conventions, de rappeler au lecteur les définitions et propriétés des facteurs L et ε , et d'énoncer de façon précise les propriétés de la correspondance conjecturée par Langlands.

Le chapitre 3, pour l'essentiel, rassemble des résultats connus. Notons $G^\circ(3)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations continues irréductibles de degré 3 de W_F^1 , et $A^\circ(3)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles supercuspidales de $GL(3, F)$. On se ramène tout d'abord à prouver l'existence, l'unicité et la bijectivité d'une application π de $G^\circ(3)$ dans $A^\circ(3)$, qui conserve les facteurs ε et soit compatible à la torsion par un caractère de $F^\times$. On prouve aussi que, l'élément σ de $G^\circ(3)$ étant donné, il existe au plus un élément de $A^\circ(3)$ qui puisse correspondre à σ ; si un tel élément existe, on le note $\pi(\sigma)$ et on dit que $\pi(\sigma)$ existe. On prouve également, utilisant [JPS1] que $\pi(\sigma)$ existe si σ est imprimitive, ou si F est de caractéristique non nulle. On obtient ainsi une application π' de $G'(3)$ dans $A^\circ(3)$, où $G'(3)$ est égal à $G^\circ(3)$, sauf si F est une extension de $\mathbb{Q}_3$, auquel cas $G'(3)$ est formé des éléments imprimitifs de $G^\circ(3)$. Suivant une idée de H. Jacquet [Ja3], nous prouvons que l'application π' est injective.

1.4. La partie la plus nouvelle de ce travail concerne l'existence de $\pi(\sigma)$ quand F est une extension de $\mathbb{Q}_3$ et que σ est primitive. L'observation cruciale est qu'il existe une extension modérée K de F , quadratique ou composée de deux extensions quadratiques, telle que la restriction σ_K de σ au groupe de Weil-Deligne de $\bar{F}$ sur K soit imprimitive. On dispose alors de la classe $\pi(\sigma_K)$ de représentations admissibles irréductibles supercuspidales de $GL(3, K)$, classe qui est invariante par l'action du groupe de Galois de K sur F . Il est alors naturel d'essayer de construire $\pi(\sigma)$ à partir de $\pi(\sigma_K)$, à l'aide d'une théorie du changement du corps de base analogue à celles développées par Langlands [La3] ou Kutzko [Ku2]. En fait, on utilise une théorie du changement de base modéré analogue à celle de Kutzko, le succès de cette technique dans notre cas a priori compliqué reposant en dernière analyse sur le fait que l'extension K de F est de degré premier à 3.

1.5. La théorie du changement de base modéré utilise une construction explicite des éléments de $A^\circ(3)$, construction qui procède en deux étapes.

H. Carayol [Ca] a donné un procédé permettant d'obtenir, par induction à partir de sous-groupes de $GL(3, F)$ compacts modulo le centre, des éléments de $A^\circ(3)$, que nous dirons très cuspidaux. Nous donnons une construction explicite très détaillée de ces éléments très cuspidaux, au chapitre 5 pour ceux d'exposant premier à 3, et à l'appendice 4 pour ceux d'exposant multiple de 3. Nous calculons également les facteurs ε .

La seconde étape nécessite l'introduction d'un corps D de centre F et de dimension 9 sur F .

Une version simple de la formule des traces, due à P. Deligne et D. Kazhdan ([DK], voir aussi [Ro2]) permet de prouver, en suivant les techniques de Flath [Fa],

INTRODUCTION

l'existence d'une bijection, conservant les facteurs ε et compatible à la torsion par un caractère de $F^{\times}$, entre $A^{\circ}(3)$ et l'ensemble des classes d'équivalence de représentations continues irréductibles, de degré > 1 , de $D^{\times}$. Mais H. Carayol a montré [Ca] que ces représentations de $D^{\times}$ sont toutes obtenues par un procédé analogue à celui qui donne les éléments très cuspidaux de $A^{\circ}(3)$. On en déduit alors que tous les éléments de $A^{\circ}(3)$ sont, à torsion près par un caractère de $F^{\times}$, très cuspidaux.

1.6. Par manque de références publiées, nous donnons au chapitre 4 une démonstration détaillée de la formule des traces et de ses conséquences, en tirant avantage et simplifications des renseignements donnés par [JPS1]. De plus nous donnons une version des théorèmes fort et faible de multiplicité un pour les représentations automorphes d'un corps gauche de centre un corps global et de degré 9 sur ce centre.

En outre, nous montrons dans ce chapitre comment les arguments de comptage de Tunnell [Tu1], Koch et Zink [Ko2, Zi], et la comparaison avec les représentations de $D^{\times}$ entraînent que si l'application $\pi : G^{\circ}(3) \rightarrow A^{\circ}(3)$ que nous cherchons est injective, alors elle est bijective.

En particulier dès la fin du chapitre 4, nous avons prouvé notre résultat principal si F n'est pas une extension de $\mathbb{Q}_3$. Si F n'est pas de caractéristique résiduelle 3, on peut d'ailleurs donner une construction explicite des éléments de $G^{\circ}(3)$ (ils sont imprimitifs) et de ceux de $A^{\circ}(3)$ (cf. chapitre 5). On peut alors décrire explicitement l'application $\pi : G^{\circ}(3) \rightarrow A^{\circ}(3)$, ce qui est fait aux appendices 4 et 5.

1.7. La description explicite du chapitre 5 fournit une paramétrisation de $A^{\circ}(3)$. Le changement de base pour une extension quadratique modérée est défini et étudié au chapitre 6, à partir de cette paramétrisation, pour les éléments de $A^{\circ}(3)$ d'exposant minimal premier à 3.